Série A: nº 3908

Nº d'ordre: 4759

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

le Gradè de Docteur ès Sciences Mathématiques

PAR

PAUL LOUIS HENNEQUIN

PREMIÈRE THÈSE

PROCESSUS DE MARKOFF EN CASCADE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 28 MAI 1962

devant la Commission d'examen

M. L. SCHWARTZ, président,

MM. FORTET et J. NEVEU, examinateurs,

M. J.-L. LIONS, invité.

Série A: nº 3908

Nº d'ordre: 4759

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

le Gradè de Docteur ès Sciences Mathématiques

PAR

PAUL LOUIS HENNEQUIN

PREMIÈRE THÈSE

PROCESSUS DE MARKOFF EN CASCADE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le

dèvant la Commission d'èxamen

M. L. SCHWARTZ, président,
MM. FORTET et J. NEVEU, examinateurs,
M. J.-L. LIONS, invité.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

JULIA G.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PREVOST	T	Chimie organique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie Végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie Générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) et sédimentologie.
GAUTHERET	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HERITIER	T	Biologie Générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique Générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
MATHIEU J. P.	T	Physique (Optique).
COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul différentiel et intégral.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BENARD.....	T	Chimie Minérale.
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie Végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et Appliquée.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comparées.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Techn. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
LEVY M.	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie Végétale B.M.P.V.
CASTAING	T	Physique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie Végétale (Orsay).
NOIROT	T	Évolution des Êtres Organisés.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie théorique.
TEILLAC.....	T	Physique Nucl. et Radio-activité.
TONNELAT	T	Biologie Physico-chimique.
VILLE.....	T	Économétrie.
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches Physiques.
GUINOCHET	T	Biologie Végétale S.P.C.N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle JOSIEN.....	T	Chimie (S.P.C.N.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE.....	T	Mathématiques (Orsay).
DENY	T	Mathématiques Générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides.

Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie Physique.
Berthelot	T	Phys. Fondamentale des Hautes Énergies (Orsay).
Bricart	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère.
Mme Albe-Fessard	T	Psychophysiologie.
Friedel	T	Physique des Solides (Orsay).
Julia M.	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.
Lender	T	Biologie Animale S.P.C.N. (Orsay).
Magat	T	Physico-chimie des radioéléments.
Mlle Quintin	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiologie animale (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky	T	Radiochimie.
Lemee	T	Physiol. Vég. B.M.P.V. (Orsay).
Guérin	T	Chimie M.P.C. (Orsay).
Chatelet M.	T	Chimie (P.C.B.).
Jean	T	Physique Nucléaire (Orsay).
Mattler	T	Physique (S.P.C.N.).
Michel L.	T	Phys. Théor. des Hautes Énergies (Orsay).
Bergerard	T	Zoologie (Orsay).
Bertein	T	Électronique (Orsay).
Bouissières	T	Chimie des Radioéléments (Orsay).
Mme Couture	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
Ellenberger	T	Géologie appliquée sur le terrain.
Franc.	T	Biologie animale (P.C.B.).
Schnell	T	Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowski	T	Physiologie générale.
Acher	T	Chimie Biologique (Orsay).
Baudoin	T	Biologie animale (P.C.B).
Beaumont	T	Biologie animale (S.P.C.N).
Blamont	T	Géophysique Ionosphère.
Bourreau	T	Botanique.
Curie D.	T	Physique (M.G.P.).
Durand-Delga	T	Géologie
Freon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller	T	Physiologie végétale.
Tortrat	T	Calcul des Probabilités.
Cailleux	T	Géologie (S.P.C.N.).
Magnan	T	Physique (S.P.C.N.).
Daudel	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chimie Théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle Fourcroy	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Mme Choquet-Bruat	T	Mécanique Analytique et Mécanique céleste.
Mlle Veil	T	Physiologie Générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique Physique et Expérimentale.
Lacombe	T	Métallur. des métaux Nucléaires.
Brochard	T	Physique P.C.B. (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Mathématiques M.P.C. (Orsay).
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire	T	Géographie physique et Géologie Dynamique.
Comolet	T	Mécanique des Fluides.
Corabœuf	T	Physiologie Animale.
Delloue	T	Physique de l'exosphère.
Gorenflot	T	Botanique II (Orsay).
Houillon	T	Biologie Animale (P.C.B.).
Jullien J.	T	Chimie (P.C.B.).
Malgrange	T	Technique Mathématique de la Physique.
Olivier	T	Anthropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre	T	Physique E.N.S. (Orsay).

Secrétaire général..... R. Poullain.

A mon Père

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538121_0027

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Bibliographie de l'Introduction

CHAPITRE 1 - PROCESSUS EN CASCADE SUR E_n

1 - Notations et définitions

2 - Exemples

3 - Les opérateurs Π et Π^*

4 - Etude des vecteurs propres de Π.

5 - Propriétés des opérateurs Π et T_λ .

6 - Détermination de Π à partir des T_λ

7 - Etude des ensembles de séjour

8 - Trajectoires et ensembles de séjour

9 - Ensembles de séjour et mesure définie par la chaine sur R^+

Bibliographie du chapitre 1

CHAPITRE 2 - CHAINES DE MARKOFF EN CASCADE HOMOGENES SUR UN GROUPE COMMUTATIF

1 - Définition

2 - Caractérisation et construction

3 - La frontière de Feller

4 - Etude de M quand F = G

5 - Etude de la frontière quand $F \neq G$

6 - Détermination des ensembles de séjour

7 - Temps de séjour et temps d'atteinte.

Bibliographie du chapitre 2

CHAPITRE 3 - ETUDE DE LA FRONTIERE DE FELLER POUR DES CHAINES DE MARKOFF EN CASCADE NON HOMOGENES

1 - Eléments extrémaux de C et décomposition de Π

2 - Construction des éléments extrémaux de C

3-- Etude d'une marche au hasard sur la droite

4 - Etude de l'exemple du paragraphe 1

5 - Une condition suffisante pour que la frontière soit réduite à un poi
dans le cas où n = 1 .

6 - Etude d'une transformation qui conserve la frontière

7 - Transformée d'un processus de naissance ou de mort.

Bibliographie du chapitre 3

I N T R O D U C T I O N

De nombreux travaux ont été, durant ces dernières années, consacrés à l'étude de processus très particuliers rencontrés soit en biologie, soit en physique nucléaire, soit dans la théorie des réactions chimiques ou des communications. Nous nons contentons de renvoyer à quelques livres où de nombreux exemples sont développés [1], [2] , [10] , Par ailleurs, une étude théorique très générale des processus dénombrables de Markoff a été faite par plusieurs anteurs [4] , [5] , [6] , [7] , [12] , [15] , [16] , [17] , [18] . Nous nous proposons dans ce travail de définir une classe de processus assez généraux pour recouvrir la plupart des cas rencontrés dans la pratique, mais assez particuliers cependant pour justifier une étude spéciale. Dans un grand nombre de problèmes pratiques, on étudie une population dont les individus peuvent, d'après leurs caractères, être classés en n espèces distinctes. S'il est possible d'inclure dans ces caractères tout ce qui, dans le passé de la population peut influer sur son avenir, l'évolution se fait suivant un processus de Markoff que nous supposerons homogène dans le temps.

Par ailleurs, cette évolution étant due à la disparition ou à l'apparition d'individus des différentes espèces , on peut supposer qu 'apparitions et disparitions simultanées sont en nombre fini. Soit K_n le module des suites de n entiers $i_1 , i_2 , \dots , i_n$; nous noterons une telle suite par une lettre majuscule I . Un processus de Markoff homogène dont l'espace des états est K_n , est définie par les probabilités de passage $P_I^J(t)$ de passer de l'état initial I à l'instant τ , à l'état final J à l'instant $\tau + t$. Elles satisfont les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} P_I^J &\geqslant 0 \\ \sum_J P_I^J(t) &\leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad \forall t \geqslant 0$$

$$\sum_J P_I^J(t)\, P_J^K(\tau) = P_I^K(t+\tau) \qquad \forall t, \tau \geqslant 0$$

$$\lim_{t \downarrow 0} P_I^J(t) = \delta_I^J = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ 0 & \text{si } I \neq J \end{cases}$$

J.L. Doob [5] a montré que sous ces hypothèses

$$\lim_{t \downarrow o} \frac{1 - P_I^I(t)}{t} = Q_I \leq \infty$$

$$\lim_{t \downarrow o} \frac{P_I^K(t)}{t} = Q_I^K < \infty \quad K \neq I$$

existent et que

$$\sum_J Q_I^J \leq Q_I \quad .$$

Si Q_I est fini, nous dirons, avec P. Lévy , [14] , que I est un état stable , s'il est infini, que I est instantané.

Nous supposerons que tous les Q_I sont finis, ce qui est une hypothèse peu restrictive ici.

Si $Q_I \neq 0$ nous poserons : $Q_I^J = Q_I \ \Pi_I^J$ pour $I \neq J$

$$\Pi_I^I = 0$$

Si $Q_I = 0$, nous poserons $\Pi_I^I = 1$

$$\Pi_I^J = 0 \quad \text{pour} \quad I \neq J \ .$$

La matrice des Π_I^J est la matrice de la chaine de Markoff associée aux changements d'états du processus. Elle permet d'étudier la suite de ceux-ci sans préciser quand ils se produisent. Au contraire, les Q_I sont liés au temps passé dans l'état I , puisque celui-ci a pour fonction de répartition :

$$1 - e^{-Q_I t}$$

Nous appelons "transition élémentaire" un couple (I, J) tel que $\Pi_I^J > 0$ Dans une population réelle, le nombre d'individus qui peuvent apparaître ou disparaître dans une telle transition élémentaire est borné indépendamment de I . De plus, on peut admettre que, bien que les Π_I^J dépendent de I , l'ensemble des transitions élémentaires de premier terme I est caractérisé par J - I , ce qui nous conduit à appeler processus en cascade un processus dont les transitions élémentaires sont caractérisées

par $J - I \in \mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de K_n indépendant de I

Dans le chapitre 1 , nous avons précisé les définitions et notations au paragraphe 1 , puis donné des exemples au paragraphe 2 . La plupart de ceux-ci conduisent à étudier des chaines en cascade où l'espace des états est non pas K_n mais l'ensemble E^n des points à coordonnées entières positives de R^n . Il est donc nécessaire de préciser la définition des transitions élémentaires sur les faces de E^n qui jouent le rôle de frontière, suivant les cas absorbantes ou partiellement réfléchissantes . Les paragraphes 3 à 6 sont consacrés à l'étude des vecteurs propres de l'opérateur Π lié à la chaine . Il est possible de construire un tel vecteur propre dès qu'on le connaît sur un sous-ensemble de E^n par des relations de récurrence. Toutefois, la caractérisation des vecteurs positifs présente des difficultés. Au paragraphe 7 , nous énonçons quelques critères, qu'on peut obtenir directement, pour qu'un sous-ensemble A de E^n soit de séjour. Dans les paragraphes 8 et 9 nous étudions l'ensemble des trajectoires, c'est-à-dire des réalisations de probabilité strictement positive du processus . Il est possible de définir une application de cet ensemble sur un sous-ensemble A de la demi-droite positive. L'intersection de cet ensemble et d'un intervalle $[r, r+1]$ a une mesure égale à ou inférieure à 1 . Pour le préciser, on est conduit à étudier le problème d'une barrière absorbante pour un processus homogène sur la droite, que nous avons résolu à l'aide des fonctions génératrices et d'une méthode analogue à celle des images en électrostatique.

Dans le chapitre 2 , nous nous sommes intéressés au cas où la chaine est homogène dans l'espace des états, c'est-à-dire où $\Pi_I^{I+J} = A_J$ ne dépend pas de I . Pour définir cette notion, il est nécessaire que l'espace des états soit muni d'une structure de groupe. Nous nous limitons au cas où le groupe G est commutatif et nous caractérisons les chaines dénombrables de ce type dans le paragraphe 2 . L'état du processus à l'instant n est alors somme de n variables indépendantes de même loi ce qui simplifie beaucoup l'étude.

Après avoir rappelé au paragraphe 3 la définition de la frontière de Feller ; nous étudions au paragraphe 4 le cas où l'on peut atteindre tous les points de G à partir de l'un d'eux. Dans le cas où $G = K^n$, on peut établir un isomorphisme entre la partie discrète de la frontière et la surface de R^n d'équation $\sum_J A_J e^{J.U} = 1$.

En particulier, la frontière de Feller est réduite à un seul point si et seulement si

$$\sum_J J A_J = 0 .$$

Au paragraphe 5 , nous étudions le cas où à partir d'un élément de G on atteint les éléments d'un semi-groupe de G. Les résultats sont analogues à ceux du paragraphe 4 . Au paragraphe 6, nous étudions les ensembles de séjour qui apparaissent comme voisinages du point particulier de la frontière qui correspond à la solution $Z = 1$ de l'équation $\pi Z = Z$. L'étude des ensembles de séjour est faite successivement dans le cas où $\sum_J J A_J = 0$ pour lequel nous avons généralisé des résultats obtenus par Ito et Mc Kean dans le cas d'une marche au hasard symétrique, et dans le cas où $\sum_J J A_J \neq 0$ où nous utilisons une généralisation de la loi du logarithme itéré à des variables vectorielles.

Le paragraphe 7 est relatif au calcul du temps d'atteinte et du temps de séjour pour un sous-ensemble de G . Ceux-ci sont solutions d'équations linéaires dont la structure est analogue à celle des équations aux différences rencontrées dans la résolution approchée du problème de Dirichlet.

Dans le chapitre 3 , nous avons cherché à étendre les résultats du chapitre 2 à des chaines non homogènes sur un groupe G . Dans les paragraphes 1 et 2 , nous avons utilisé la remarque suivante : si $\pi = \sum T_l$ où les T_l commutent deux à deux et sont positifs, tout élément extrémal du cône des $Z \geqslant 0$ tels que $\pi Z = Z$ est vecteur propre commun des T_l . Si les T_l sont plus simples que π , cela simplifie la recherche de ces éléments. C'est d'ailleurs cette même remarque qui est à la base de la méthode des "directions alternées" pour la résolution approchée de problèmes elliptiques. On peut ainsi ramener l'étude d'une marche au hasard particulière, mais non homogène dans le plan , à l'étude d'une marche au hasard sur la droite. C'est l'objet des paragraphes 3 et 4.

Dans le paragraphe 5 ,nous avons établi que la condition $\sum_j j \pi_i^{i+j} = 0 \quad \forall i$, nécessaire et suffisante pour que la frontière de Feller d'une chaine homogène soit réduite à un seul point était encore suffisante pour un processus sur la droite. Le fait que l'espace

des états soit totalement ordonné joue un rôle dans cette démonstration qui ne se généralise pas à une dimension supérieure à 1 .

Dans le paragraphe 6, nous avons cherché à définir des classes de matrices de probabilité qui définissaient la même frontière de Feller .

La transformation définie par $P_I^J = \sum_n a_n(I)\ \Pi_I^{nJ}$ où $\sum_n a_n(I) = 1$ $a_n(I) \geqslant 0$ transforme une matrice de probabilité en une matrice de probabilité . Cette transformation conserve la frontière si les $a_n(I)$ sont indépendants de I .

Dans le par graphe 7 , nous avons étudié en détail la transformation d'un processus de naissance et de mort.

Nous donnons ci-dessous une bibliographie générale d'ouvrages en relation avec notre travail. Les articles utilisés ont été indiqués à la fin de chaque chapitre.

C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer ma gratitude à Monsieur R. FORTET pour les observations, les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer durant l'élaboration de ce travail.

J'ai aussi unee grande reconnaissance à l'égard de Monsieur Laurent SCHWARTZ pour m'avoir invité à collaborer à son enseignement de Méthodes Mathématiques de la Physique et pour avoir accepter de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie enfin Monsieur J. NEVEU qui m'a donné de nombreuses indications dans la poursuite de ce travail et Monsieur J.L. LIONS dont certains des travaux font l'objet de ma seconde thèse.

-=-=-=-=-=-=-=-

BIBLIOGRAPHIE POUR L'INTRODUCTION

1] ARLEY, N. - "On the theory of stochastic processes and their application to the theory of the cosmic radiation" John Wiley and sons - New-York - 1948.

2] BHARUCHA-REID, A.T.- "Elements of the theory of Markov processes and their applications " Mc Graw Hill - New York - 1960

3] BLANC LAPIERRE, A. et R. FORTET - "Théorie des fonctions aléatoires" Masson - Paris 1953

4] CHUNG, K.L. - "Markov chains with stationary transition probabilities" Springer Verlag - Berlin 1961.

5] DOOB, J.L. - "Stochastic processes " John Wiley and sons- New York 1953

6] DYNKIN,E.B. - "Theory of Markov processes " - Pergamon - New York 1960

7] FELLER, W. - "An introduction to probability theory and its applications " Volume 1 - 2ème édit. John Wiley and sons- New York - 1957.

8] FORTET, R. - "Calcul des probabilités " C.N.R.S. Paris 1950.

9] FRECHET, M. - "Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités II - Méthode des fonctions arbitraires- Théorie des événements en chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. 2ème édit. Gauthier Villars Paris 1952.

10] HARRIS, T.E. - "Branching processes" - Springer Verlag - Berlin (Sous-presse).

11] KEMENY , J.G. et SNELL, J.L. - "Finite Markov chains " D. Van Nostrand Company - Princeton , N.J. 1960

12] KEMPERMAN , J.H.B. - "The passage problem for a stationary Markoff chain" The University of Chicago Press - 1961

13] LEVY, P. - "Theorie de l'addition des variables aléatoires" Gauthier-Villars - Paris 1937.

14] LEVY, P. - "Processus stochastiques et mouvement brownien" Gauthier Villars Paris 1948.

15] LEVY, P. - "Systèmes markoviens et stationnaires"- cas dénombrable" Annales de l'E.N.S. - vol. 68, 1951, p. 327.

16] LOEVE. M. - "Probability theory" - D. Van Nostrand Comapny - Princeton N. J. 1955 -

17] NEVEU, J. - "Etude des semi-groupes de Markov" Thèse Paris 1955.

18] SARYMSAKOFF, T.A. - "Elements de la théorie des processus de Markov" Gosudarstv. Izdat. Tech. Teor. Lit. Moscou 1954.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

CHAPITRE I

PROCESSUS EN CASCADE SUR E_n

1 - NOTATIONS ET DEFINITIONS

a) L'espace des états

L'état d'une population comportant des individus de n espèces distinctes peut être, si l'on ne cherche pas à discerner deux individus de même espèce, caractérisé par n nombres entiers positifs (≥ 0) i_1 , i_2,...i_n . Nous supposons le nombre n des espèces fixé une fois pour toutes, certains des i_k pouvant être nuls.

Introduisons les deux ensembles suivants :

K_n est le module des suites de n entiers i_1 , i_2 ,...,i_n ou encore $\{ i_k$ nous appelons point I un élément de K_n et coordonnées du point I les nombres i_k .

E_n est le cône de K_n formé des suites de n entiers positifs.

b) Transitions élémentaires pour un processus sur K_n

Nous appelons transition élémentaire une transition de I à J de probabilité $\pi_I^J > 0$.

DEFINITION 1 - Nous appelons processus en cascade sur K_n un processus de Markoff sur l'espace K_n dont les transitions élémentaires sont caractérisées par $J-I \in \mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de K_n indépendant de I .

De tels processus sont étudiés sous le nom de "marche au hasard" en particulier dans le cas où Π_I^J ne dépend que de $J - I$ (processus homogène dans l'espace , cf. chapitre II).

c) Transitions élémentaires pour un processus sur E_n

L'introduction de K_n simplifie la définition , mais nous nous proposons , dans ce chapitre, d'étudier les processus sur E_n . Il est clair qu'il faut alors préciser ce qui se passe au voisinage des points I dont une ou plusieurs coordonnées sont nulles.

Nous définissons une partition de E_n de la façon suivante : écrivons les 2^n premiers entiers k : $0 \leqslant k \leqslant 2^n-1$ dans le système binaire et appelons F_n^k le sous-ensemble de E_n défini par :

$$\begin{cases} I_i = 0 & \text{si le i-ème chiffre de } k \text{ est } 0 \\ I_i > 0 & \text{si le i-ème chiffre de } k \text{ est } 1 \end{cases}$$

(I_i désigne la i-ème coordonnée de I).
par exemple $F_n^0 = \{ 0 \}$ $\qquad F_n^{2^n-1} = \{ I : I_i > 0 \}$

Nous appelons fermeture $\bar{F}_n^k$ de F_n^k le sous-ensemble de E_n défini par $I_i = 0$ si le i-ème chiffre de k est 0 .

Nous noterons F'^k_n , $\bar{F}'^k_n$ les plus petits sous-modules de K_n contenant respectivement F_n^k et $\bar{F}_n^k$.

DEFINITION 2 - Nous appelons processus en cascade sur E_n un processus homogène de Markoff dont les transitions élémentaires (I, J) sont caractérisées par

$$I \in F_n^k \Longrightarrow \begin{cases} J \in E_n \\ J - I \in \mathfrak{J}_k \end{cases}$$

où $\mathfrak{J}_k$ est un sous-ensemble fini de K_n dépendant seulement de k .

On pourra pratiquement se limiter aux deux cas suivants :

a) $\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}_{2^n-1}$ et nous dirons que F_n^k est partiellement réfléchissa

b) $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{2^n-1} \cap \overline{F}_n'^k$ et nous dirons que $\overline{F}_n^k$ est absorbant.

Une fois $\overline{F}_n^k$ atteint, l'évolution s'y poursuit suivant un processus en cascade de dimension strictement inférieure à n .

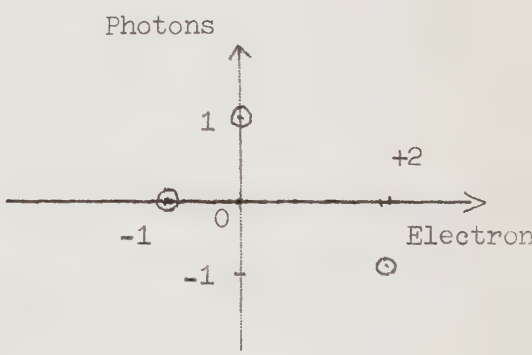
2 - EXEMPLES

a) $n = 1$, $\mathcal{J}_1 = \{-1 , +1\}$. De tels processus sont appelés "de naissance et de mort" . On peut en considérer deux types suivant que $\mathcal{J}_o = \{0\}$ ou $\mathcal{J}_o = \{1\}$.

b) si $n > 1$, on a une grande diversité de situations. Nous supposerons que $\mathcal{J}_k$ a un élément dont la somme des coordonnées est strictement positive, c'est-à-dire que la population totale peut augmenter au cours d'une transition élémentaire . En effet, s'il n'en est pas ainsi, une fois la population initiale donnée, l'évolution se fait suivant un processus dont l'espace des états est fini et la plupart des problèmes posés par ces processus sont résolus . (cf. par exemple [11] de l'introduction).

Les cascades électrophotoniques peuvent, quand on néglige les variations d'énergie des particules , être ainsi schématisées : un électron peut émettre un photon et subsister, ou bien être absorbé par le milieu ; un photon peut se tranformer en deux électrons .

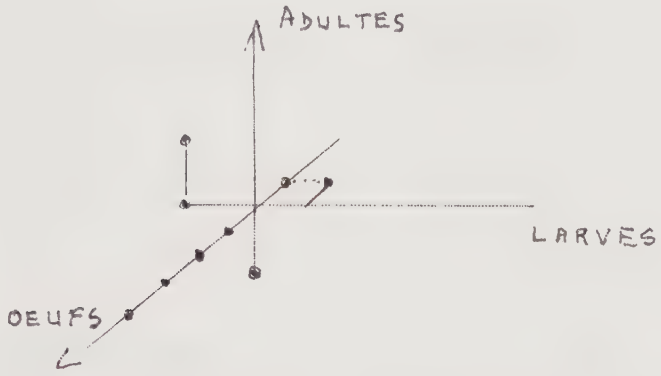
$\mathcal{J}_3$ est donc composé de trois points de E_2 . Aucun des demi-axes F_2^1 F_2^2 n'est absorbant mais l'origine l'est.



c) Dans cet exemple , les espaces sont les stades, supposés en nombre fini de la vie d'un individu (oeufs, larves, adultes).

Un oeuf peut disparaître ou éclore en donnant une larve . Une larve peut disparaître ou se transformer en adulte. Un adulte peut disparaître ou pondre des oeufs.

Si p est le m nombre maximum d'oeufs pondus par un adulte, J_7 se compose de $p + 5$ points . $F_3^0 = 0$ seule est absorbante.



d) Dans un même milieu vivent n espèces en compétition. Un individu de chaque espèce peut disparaître ou engendrer p individus ; $k \leq n$ individus d'espèces différentes peuvent disparaître simultanément .

Quand une des espèces a été éliminée par les autres , celles-ci poursuivent leur évolution suivant un processus analogue de dimension $n-1$. Chaque $\overline{F}_n^k$ est absorbante.

e) On peut combiner les exemples c) et d).

3 - LES OPERATEURS $\overline{\Pi}$ et $\overline{\Pi}^*$

Aux Π_I^J , nous associons deux opérateurs sur l'espace S des suites x de réels dont nous numérotons les éléments par un indice $I \in E_n$, le premier opérateur $\overline{\Pi}$ est défini par

$$(\overline{\Pi}\, x)_I = \sum_J \overline{\Pi}_I^J \; x_J$$

la somme figurant au second membre est finie. De plus $\overline{\Pi}$ est un opérateur positif, borné sur le sous-espace L_∞ des suites bornées, et de norme inférieure ou égale à 1 , et sur le sous-espace L_1 des suites sommables

où sa norme est $\leq p$ (p est le nombre de points de $\mathcal{J}_{2^n-1}$) .

Le second opérateur π^* (adjoint de π) est défini par

$$(\pi^* x)^I = \sum_J \pi^I_J x^J$$

l'ensemble $\mathcal{J}^*_k$ qui joue le rôle de $\mathcal{J}_k$ pour π^* est le symétrique de $\mathcal{J}_k$ par rapport à 0 .

π^* est positif, borné sur L_∞ et sur L_1 de norme respectivement inférieure à p et 1 .

4 - ETUDE DES VECTEURS PROPRES DE π et π^*

a) Vecteurs propres de π

Les vecteurs propres de π sont déterminés par l'équation

$$\pi x = \lambda x$$

PROPOSITION 4.1 - Pour $\lambda > 0$, l'équation $\pi x = \lambda x$ est équivalente à

$$x = T_\lambda x_o$$

où x_o désigne la restriction de x à un sous-ensemble $\mathcal{J}_o$ de E_n dépendant uniquement des $\mathcal{J}_k$ et T_λ un opérateur dépendant de λ . On notera $\mathcal{X}_o$ l'espace des x_o

Munissons K_n d'un ordre total strict noté " $\prec$ " tel que 0 soit le plus petit élément de E_n . On peut prendre par exemple $I \prec J$ si et seulement s'il existe p $(1 \leq p \leq n)$ tel que

$$\sum_k^n I_i = \sum_k^n J_i \quad \text{pour } k \prec p \quad \text{et} \quad \sum_p^n I_i < \sum_p^n J_i$$

Bien entendu , une permutation des axes fournit un autre ordre et il y a donc n! ordres possibles analogues à celui-là.

Soit U le plus grand élément de $\mathcal{J}_{2^n-1}$; d'après nos hypothèses $U > 0$.

Supposons d'abord qu'il n'y a pas d'ensembles absorbants , c'est à dire que $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{2^n-1}$ et que $U \notin E_n$ (c'est-à-dire que

$I \in E_n \implies (I + U) \in E_n)$. L'équation $\pi x = \lambda x$ est équivalente au système d'équations :

$$(E_I) \quad : \quad \lambda x_I = \sum_J \pi_I^J \cdot x_J$$

que l'on peut supposer ordonnées par valeurs croissantes de I . La variable x_{I+U} apparaît pour la première fois au second membre de l'équation (E_I) , qui la détermine si l'on connaît les x_J pour $J < I + U$. On peut donc choisir arbitrairement les x_J pour $J \in E_n \cap \complement(E_n + U) = \mathcal{J}_o$ et en déduire les x_J pour $J \in E_n + U$.

Si $U \notin E_n$, l'ensemble $E_n \cap (E_n + U)$ a pour plus petit élément U' défini par $U'_i = \sup (0, U_i)$. Posons :

$$u = \sum_1^n U_i \qquad u' = \sum_1^n U'_i$$

Soit A_k le sous-ensemble de E_n défini par :

$$ku < \sum_1^n I_i < (k + 1)\, u \qquad k \geqslant 0 \quad .$$

Posons :

$$B_k = \bigcup_{p=o}^{k} A_p \quad , \quad C_k = A_k \cap (E_n + U) \, .$$

Le système des équations (E_J) pour $J \in B_k$ contient les x_I pour lesquel $I \in B_k \cup C_{k+1} \cup D_{k+1}$ où D_k est un sous-ensemble de A_k disjoint de C_k

A_k contient

$$a_k = \sum_{r\,=\,ku}^{(k+1)u-1} C_{n+r-1}^r \qquad \text{éléments ,}$$

C_k en contient

$$c_k = \sum_{r=ku-u'}^{(k+1)u-1-u'} C_{n+r-1}^r$$

Le nombre d'éléments d_k de D_k est une fonction croissante de k telle que $c_k + d_k \leq a_k$.

Supposons déterminés les x_I pour $I \in B_{k-1} \cup C_k \cup D_k$, et satisfaisant aux équations (E_J) pour $J \in B_{k-1}$. Ecrivons les équations (E_J) pour $J \in A_k$, soit a_k équations contenant comme variables nouvelles les x_I pour $I \in (A_k \cap (D_k \cup C_k) \cup C_{k+1} \cup D_{k+1} = F_k$ soit $a_k - d_k - c_k + c_{k+1} + d_{k+1}$ variables nouvelles. On peut donc choisir arbitrairement $c_{k+1} - c_k + d_{k+1} - d_k$ variables, ce qui détermine $\mathcal{J}_o \cap F_k$ donc $\mathcal{J}_o$, puisque $\cup F_k = \cup A_k = E_n$.

Examinons maintenant le cas des ensembles absorbants. Si le point 0 est absorbant, l'équation E_o se réduit à $x_o = x_o$, on peut donc choisir arbitrairement x_o. On détermine alors x_I pour tous les $\overline{F}_n^k$ absorbants de dimension 1 en déterminant l'ensemble $\mathcal{J}_o^k$ comme si 0 n'était pas absorbant, et, s'il l'est, en lui rajoutant le plus grand élément de $\mathcal{J}_k$, U^k, puisque E_{U^k} ne détermine plus x_{U^k}.

De proche en proche, on détermine $\mathcal{J}_o^k$ pour des $\overline{F}_n^k$ de dimension croissante en prenant l'union de l'ensemble correspondant au cas où $\overline{F}_n^k$ n'a pas de sous-ensemble absorbant et des ensembles $\overline{F}_n^p$ et U_p pour tous les ensembles absorbants $\overline{F}_n^p$ de $\overline{F}_n^k$.

b) Vecteurs propres de π^*

Ils se construisent de façon tout à fait analogue en remplaçant $\mathcal{J}$ par son symétrique $\mathcal{J}^*$ par rapport à 0. Deux cas sont possibles : ou bien il existe un ordre sur E_n tel que le plus grand élément U^* de $\mathcal{J}^*$ satisfasse $\sum_{i=1}^{n} U_i > 0$, alors on détermine un ensemble $\mathcal{J}_o^*$ analogue à $\mathcal{J}_o$, ou bien $\sum_{i=1}^{n} U_i \leq 0$ et alors le système homogène des équations E_I écrites pour $\sum_{i=1}^{n} I_i \leq k$ comporte autant d'équations que d'inconnues. Dans ce cas, le spectre de π^* est dénombrable.

5 - PROPRIETES DES OPERATEURS Π ET T_λ .

a) Soit $x_I = \sum_{J \in \mathcal{J}_0} T_\lambda \, {}^J_I \, x_J$; pour tout I fixé, seul un nombre fini de $T_\lambda \, {}^J_I$ sont différents de zéro : tous les $T_\lambda \, {}^J_I$ sont nuls pour

$$\sum_{i=1}^{n} J_i > \sum_{i=1}^{n} (I_i + J_i)$$

b) $T_\lambda \, {}^J_I = \delta^J_I$ si $I \in \mathcal{J}_0$

c) $x = T_\lambda \, x_0 \Longrightarrow \Pi x = \lambda x$ donc $(\Pi - \lambda) \, T_\lambda$ est nul sur l'espace $\mathcal{X}_0$ des x_I pour $I \in \mathcal{J}_0$ et

$$\sum_{K \notin \mathcal{J}_0} \Pi^K_I \, T_\lambda \, {}^J_K + \Pi^J_I - \lambda \, T_\lambda \, {}^J_I = 0 \qquad \forall J \in \mathcal{J}_0$$

d) $\Pi x = \lambda x \Longrightarrow x = T_\lambda \, x_0$ et par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} \Pi x = \lambda x \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = 0$$

autrement dit, l'opérateur B_λ de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ défini par

$$B^K_I = \begin{cases} \Pi^K_I - \lambda \delta^K_I & K \notin \mathcal{J}_0 \\ -\lambda \delta^K_I & K \in \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

a un noyau réduit à zéro.

e) L'opérateur Π est positif ; il en résulte que

$$B^K_I + \lambda \, \delta^K_I = \left\{ \begin{array}{ll} \Pi^K_I & \text{si } K \notin \mathcal{J}_0 \\ 0 & \text{si } K \in \mathcal{J}_0 \end{array} \right\} \text{ est } \geqslant 0 \, .$$

. D'autre part , en vertu de c , pour $J \in \mathcal{J}_o$

$$\pi_I^J = - \sum_{K \notin \mathcal{J}_o} \pi_I^K \, T_\lambda{}_K^J + \lambda \, T_\lambda{}_I^J = - \sum_K B_I^K \, T_\lambda{}_K^J \leq 0 \ .$$

donc $B_\lambda \, T_\lambda \leq 0$.

B_λ possède donc les quatre propriétés suivantes qui définissent un ensemble convexe :

$$\begin{cases} B_\lambda \, T_\lambda \leq 0 \\ B_\lambda + \lambda \, I \geq 0 \\ \text{La restriction de } B_\lambda \text{ à } \mathcal{X}_o \text{ est } -\lambda I \\ \text{Ker } B_\lambda = 0 \end{cases}$$

6 - DETERMINATION DE π A PARTIR DES T_λ

Nous allons montrer qu'on peut déterminer π à partir de T_λ et de ses dérivées par rapport à λ dans le cas où $U \in E_n$.

PROPOSITION 6.1.- Si $U \in E_n$, quels que soient I et J fixés , $T_\lambda{}_I^J$ est un polynôme en λ . Si en outre, $K \in \mathcal{J}$, $K \prec U$, $U_i \neq 0$, entraine $K_i \leq 0$. Si on appelle k l'entier tel que $J = I - kU \in \mathcal{J}_o$, alors le degré de $T_\lambda{}_I^J$ est k et son terme de plus haut degré est :

$$\frac{\lambda^k}{\pi_J^{J+U} \quad \pi_{J+U}^{J+2U} \cdots \pi_{I-U}^{I}}$$

et si $K \neq I - kU$

$$d^\circ(T_\lambda{}_I^K) < k \ .$$

Remarquons d tout d'abord que $I - k\,U \in \mathcal{J}_o \iff \inf_{U_i \neq 0}(I_i - kU_i) = 0$

il résulte de $U \in E_n$ que, quel que soit $I \in E_n$, il existe k tel que $I - kU \in \mathcal{J}_o$. Par construction, $T_\lambda{}_I^J$ est un polynôme dont le degré est au plus égal au nombre d'équations qu'il a fallu écrire pour le déterminer.

Si la seconde hypothèse est satisfaite, soit $\Lambda \in I - U + \mathcal{J}$ $\Lambda < I$: on a $\Lambda = I - U + K$ avec $K \in \mathcal{J}$, $K < U$ donc

$$\inf_{U_i \neq 0} [\Lambda_i - (k-1)\, U_i] = \inf_{U_i \neq 0} (I_i - kU_i + K_i) \leq 0$$

et

$$\Lambda - k' U \in \mathcal{J}_o \quad \Longrightarrow \quad k' \leq k-1$$

Démontrons la conclusion par récurrence sur I : elle est vraie si $I \in \mathcal{J}_o$, $k = 0$ puisqu'alors $T_\lambda{}^J_I = \delta^J_I$.

Si $k > 0$, l'équation E_{I-U} s'écrit :

$$\Pi^I_{I-U}\ T_\lambda{}^J_I = \lambda\, T_\lambda{}^J_{I-U} - \sum_{K<I} \Pi^K_{I-U}\ T_\lambda{}^J_K$$

Puisque $K < I$

$$d^\circ(T_\lambda{}^J_K) \leq k' \leq k-1$$

$$I - kU \neq J \quad \Longrightarrow \quad d^\circ\, T^J_{I-U} < k-1 \quad \Longrightarrow \quad d^\circ T^J_I < k$$

$$I - kU = J \quad \Longrightarrow \quad d^\circ\, T^J_{I-U} = k-1 \quad \Longrightarrow \quad d^\circ\, T^J_I = k$$

et le terme de plus haut degré est

$$\frac{\lambda^k}{\Pi^{J+U}_J \cdots \Pi^I_{I-U}}$$

PROPOSITION 6.2.- La condition nécessaire et suffisante pour que $(\Pi - \lambda I)^n x = 0$ est qu'il existe $x^o, x^1, \ldots, x^{n-1} \in \mathcal{X}_o$ tels que

$$x = T_\lambda{}^{(n-1)}\, x^{n-1} + \ldots + T_\lambda\, x^o$$

où $T_\lambda{}^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de T_λ par rapport à λ .

a) la condition est suffisante : en effet, de

$$(\Pi - \lambda I)\, T = 0$$

on déduit par dérivation

$$(\Pi - \lambda I)\, T'_\lambda = T_\lambda = 0$$

puis

$$(\Pi - \lambda I)\, T_\lambda{}^{(n)} - n T_\lambda{}^{(n-1)} = 0$$

Donc

$$(\pi - \lambda I)^{n+1} \; T_\lambda^{(n)} = n! \, (\pi - \lambda) \, T_\lambda = 0$$

b) la condition est nécessaire : en effet par récurrence sur n

$$(\pi - \lambda I)^n x = 0 \qquad (\pi - \lambda I)^{n-1} (\pi - \lambda I) x = 0$$

$$(\pi - \lambda I)\, x = T_\lambda^{(n-2)} x'^{n-2} + \dots + T_\lambda x'^{0}$$

$$= (\pi - \lambda I)\left[T_\lambda^{(n-1)} \frac{x'^{n-2}}{n-1} + \dots + T'_\lambda x'^{0}\right]$$

$$x = T_\lambda^{(n-1)} \frac{x'^{n-2}}{n-1} + \dots + T'_\lambda x'^{0} + T_\lambda x^{0}$$

PROPOSITION 6.3 - Les $T_\lambda^{(k)}$ sont linéairement indépendants pour $1 \leq k \leq n$ quel que soit n .

On le démontre par récurrence sur n :

Si $T_\lambda^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, T_\lambda^{(i)}$

$$n \, T_\lambda^{(n-1)} = (\pi - \lambda I) \, T_\lambda^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\pi - \lambda I) \, T_\lambda^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} i \, a_i \, T_\lambda^{(i-1)}$$

PROPOSITION 6.4 - Si $U \in E_n$, quels que soient $x \in \mathcal{X}$, $\lambda > 0$, et le sous-ensemble fini $\mathcal{J}$ de E_n , il existe $y \in \mathcal{X}$ et k tels que $y_I = x_I$ pour $I \in \mathcal{J}$ et $(\pi - \lambda I)^k y = 0$.

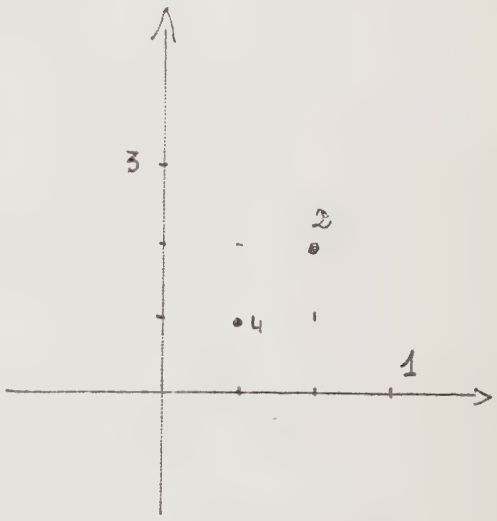
En effet, l'équation $(\pi - \lambda I)^k y = 0$ est du même type que l'équation $(\pi - \lambda I) y = 0$, l'ensemble $\mathcal{J}^k$ étant constitué de tous les éléments de K_n somme de k éléments de $\mathcal{J}$, son plus grand élément est donc $k\,U$ et on peut choisir arbitrairement y_I pour $I \in \mathcal{J}_o^k = E_n \cap \complement(E_n + k\,U)$. Il existe donc k tel que $\mathcal{J}_o^k \supset \mathcal{J}$.

Ces propositions peuvent être fausses si un des U_i est < 0 . En effet ce n'est plus nécesaairement l'équation (E_i) qui détermine x_{I+U} et elle

peut au contraire déterminer x_I en fonction de x_{I+U} . Il en résulte que $T_{\lambda I}^{J}$ est une fraction rationnelle en λ .

L'exemple ci-dessous montre que la proposition 6.4 n'est plus valable (pour un opérateur π non $\geqslant 0$) .

$n = 2$. $\mathcal{J}$ se compose des deux points $(-1 , 2)$ et $(2, -1)$. Nous notons par les indices 1, 2, 3, 4 les quatre points $1(0, 3)$ $2(2, 2)$, $3(3, 0)$, $4(1, 1)$



$$(E_1) \quad \lambda x_1 = \alpha_1^2 x_2$$

$$(E_3) \quad \lambda x_3 = \alpha_3^2 x_2$$

$$(E_4) \quad \lambda x_4 = \alpha_4^3 x_3 + \alpha_4^1 x_1$$

D'où :

$$\lambda^2 x_4 = (\alpha_4^3 \alpha_3^2 + \alpha_4^1 \alpha_1^2) x_1$$

et si

$$\alpha_4^3 \alpha_3^2 + \alpha_4^1 \alpha_1^2 = 0 , \quad x_4 = 0 \quad \text{quel que soit} \quad \lambda \neq 0$$

il en résulte $(\pi - \lambda I)\, x = 0 \implies x_4 = 0$ quel que soit $\lambda \neq 0$

d'où par dérivation

$$(\pi - \lambda I)^k x = 0 \implies x = \sum_0^k \alpha_i x^{(i)} \implies x_4 = 0$$

THEOREME 6.1 - Si $U \in E_n$, quel que soit $\lambda > 0$ et fini , π est entièrement défini par les $T_\lambda^{(n)}$.

En effet, d'après les proposition 6.2 et 6.4 , quel que soit $x \in \mathcal{X}$ et quel que soit l'ensemble fini $\mathcal{J}$ il existe n et $x^0 , \ldots x^{n-1} \in \mathcal{X}_0$ tels que

$$x_I = (T_\lambda^{(n-1)} x^{n-1} + \ldots + T_\lambda x_0)_I \quad \text{pour} \quad I \in \mathcal{J} .$$

si $\mathcal{J} \supset K + \mathcal{J}$

$$(\overline{\pi} x)_K = \lambda(T_\lambda^{(n-1)} x^{n-1} + \ldots + T_\lambda x^0)_K - [(n-1)T_\lambda^{(n-2)} x^{n-1} + \ldots + T_\lambda x^1]_K$$

7 - ETUDE DES ENSEMBLES DE SEJOUR

Nous adopterons la terminologie de Feller et nous appellerons avec lui "ensemble de séjour" les sous-ensembles A de E_n tels qu'il existe $I \in A$ et $\eta > 0$ satisfaisant $\pi_A^{(k)\,A}_{\ I} \geq \eta$ pour tout k ; où π_A est la restriction de π à A . , $\pi_A^{(k)}$ sa puissance k-ième et $\pi_I^A = \sum_{J \in A} \pi_I^J$.

(PROPOSITION 7.1 - La condition nécessaire et suffisante pour que A fini
(soit un ensemble de séjour est qu'il contienne un point 0 absorbant,
(c'est-à-dire tel que $\pi_o^o = 1$.

La condition est manifestement suffisante (prendre $I = 0$) ; pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de montrer que s'il n'y a pas de point absorbant $\pi_A^k\ 1 \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$. Soit pour $I \in A$, $\sigma_I^A = \lim_{k \to \infty} \pi_A^{k\,A}_{\ I}$ (cette suite décroissante positive converge et sa limite est positive).

$$(1 - \pi_I^I)\, \sigma_I^A = \sum_{\substack{J \neq I \\ j \in A}} \pi_I^J \sigma_J^A$$

S'il n'y a pas de point absorbant $\pi_I^I = 0$. Il reste

$$\sigma_I^A = \sum_{\substack{J \neq I \\ J \in A}} \pi_I^J \sigma_J^A$$

Soit $\eta = \sup_I \sigma_I^A$. De $\sum_J \pi_I^J \leq 1$, il résulte que :

$$\sigma_I^A = \eta \Longrightarrow \sigma_J^A = \eta \quad \text{pour tout } J \text{ tel que } \pi_I^J \neq 0 .$$

Quel que soit I appartenant à A , il existe $I_o = I, I_1, I_2, \ldots, I_p$ tels que $\pi_{I_I}^{I_{i+1}} > 0$ et $I_p \in A$, d'où , si $\eta > 0$:

$\sigma^A_{I_{p-1}} < \eta$ contrairement à l'hypothèse ; donc $\eta = 0$.

PROPOSITION 7.2 - $\sigma^A_I = 1$ entraine $\sigma^A_J = 1$ pour $J \in (I + k\mathfrak{I}) \cap E_n$ et $(I + k\mathfrak{I}) \cap E_n \subset A$ quel que soit k .

Il suffit d'écrire

$$\sigma^A_I = \sum_{J \in (I+\mathfrak{I}) \cap A} \pi^J_I \sigma^A_J \quad , \quad \sigma^A_J \leq 1 \quad , \quad \sum_J \pi^J_I \leq 1$$

l'égalité n'est possible que si $\sigma^A_I = 1$ et $J \in (I + \mathfrak{I}) \cap E_n$ ce qui entraine $J \in A$ d'où la proposition en itérant.

Corollaire 1 - Si $\bigcup_k (I + k\mathfrak{I}) \supset E_n$ quel que soit $I \in E_n$, $\sigma^A_I = 1$ entraine $A = E_n$.

Corollaire 2 : Si quel que soit I appartenant à A , $\sigma^A_I < 1$, on obtient un nouvel ensemble de séjour en enlevant de A un ensemble fini quelconque B .

En effet, $\sup_{I \in B} \sigma^A_I = 1 - \eta < 1$ et l'ensemble des I pour lesquels $\sigma^A_I > 1 - \eta$ est un ensemble de séjour contenu dans $A - B$ (Feller) Comme tout ensemble qui contient un ensemble de séjour est un ensemble de séjour, on a le corollaire .

PROPOSITION 7.3 - Si A est un ensemble de séjour, il contient une suite I_i telle que :

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \pi^{E-A}_{I_k}) \quad \text{converge} .$$

De

$$\sigma^A_I = \sum_{J \in A} \pi^J_I \sigma^A_J$$

on déduit qu'il existe :

$$J \in (I + \mathfrak{I}) \cap A$$

tel que

$$\sigma^A_I \leq \sigma^A_J (1 - \pi^{E-A}_I)$$

et en itérant, $I_o = I$, I_1 , ..., I_n , tels que

$$\sigma^A_{I_o} \leq \sigma^A_{I_n} \prod_{k=o}^{n-1} (1 - \pi^{E-A}_{I_k})$$

d'où le résultat en choisissant I_o tel que $\sigma^A_{I_o} > 0$ et en utilisant $\sigma^A_{I_n} \leq 1$.

PROPOSITION 7.4 - Si I_o , ..., I_n est telle que

$$\prod_{k=o}^{\infty} \pi^{I_{k+1}}_{I_k} \quad \text{converge ,}$$

tout ensemble contenant les I_k pour $k \geq n$ est de séjour.

En effet, $\pi^A_{I_o} \geq \pi^{I_1}_{I_o}$

$$\pi^{n\,A}_{A\,I_o} \geq \pi^{I_1}_{I_o} \ \ldots \ \pi^{I_n}_{I_{n-1}}$$

d'où

$$\sigma^A_{I_o} \geq \prod_{k=o}^{\infty} \pi^{I_{k+1}}_{I_k} > 0$$

Et la proposition en découle en utilisant la proposition 7.2.

8 - TRAJECTOIRES ET ENSEMBLES DE SEJOUR

DEFINITION - Nous appelons trajectoire associée à la chaine une de ses réalisations , c'est-à-dire une suite d'états I(0), I(1) , ..., I(r) ...

tels que $\pi^{I(r)}_{I(r-1)} > 0$ (cf. [2]) .

Si $p = 1$, il n'y a pas qu'une trajectoire possible : si $p > 1$, numérotons de 0 à p-1 les éléments de $\mathcal{J}_{2^n-1}$ soit I^o , I^1, ..., I^{p-1}

et par un indice $\nu(I)$ entier positif les éléments de E_n .

A toute trajectoire $I(0)$, $I(1)$, ...,$I(r)$ ... nous pouvons associer la suite k_i définie par

$$I^{k_i} = I(i) - I(i-1) \qquad (0 \leq k_i \leq p-1)$$

et le réel positif

$$x = \nu(I(0)) + \sum_{1}^{\infty} \frac{k_i}{p'_i} \qquad (8.1)$$

où la suite des p'_i sera précisée plus loin.

Cherchons l'image A de cette application dans R^+ : les k_i doivent satisfaire :

$$I(0) + \sum_{1}^{r} I^{k_i} \in E_n \quad \text{quel que soit} \quad r \geq 0 \qquad (8.2)$$

Etude de l'ensemble A : Deux cas sont possibles :

a) Tous les éléments de $\mathcal{J}_{2^n-1}$ donc de $\mathcal{J}_k$ appartiennent à E_n .

Si aucun des F_k n'est absorbant (8.2) est satisfaite pour toute suite d'entiers $k_i \leq p-1$. Si un F_k est absorbant, ou bien $I(0) \notin F_k$ et F_k n'est jamais atteinte, ou bien $I(0) \in F_k$ et on est ramené à étudier les trajectoires dans F_k .

Si l'on veut qu'à un x compris entre $\nu(I(0))$ et $\nu(I(0))+1$ l'équation (8.1) associe au plus une trajectoire issue de I_o , on doit satisfaire :

$$\sum_{i+1}^{\infty} \frac{p-1}{p'_k} < \frac{1}{p'_i} \qquad \forall i \geq 0 \quad (p'_o = 1) \qquad (8.3)$$

Cette condition est satisfaite si l'on choisit la suite $\frac{p^i}{p'_i}$ strictement décroissante car :

$$\sum_{i+1}^{\infty} \frac{p-1}{p'_k} < \sum_{i+1}^{\infty} \frac{(p-1)p^{i-k}}{p'_i} = \frac{1}{p'_i}$$

De plus , les ensembles $C_r = \left\{ x : x = \nu(I(0)) + \sum_1^{r-1} \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\lambda}{p'_{r-1}} \right.$ (1,17)

$\left. 0 \leq \lambda < 1 \right\}$ forment une suite décroissante car

$$\sum_1^r \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\lambda}{p'_r} = \sum_1^{r-1} \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\mu}{p'_{r-1}} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{(k_r + \lambda)}{p'_r} p'_{r-1}$$

d'où

$$0 < \mu < p \frac{p'_{r-1}}{p'_r} < 1$$

C_{r+1} est la réunion de p^r ensembles disjoints de mesure $\frac{1}{p'}$ et la limite des C_r , $A \cap [\nu(I(0)) , \nu(I(0)) + 1[$ a pour mesure

$\lim_{i \infty} \frac{p^i}{p'_i}$ qui peut être nulle ($p'_i = p'^i$ $p' > p$) ou strictement positive ($p'_i = a_i p^i$, $a_o = 1$, a_i strictement croissante bornée) et arbitrairement voisine de 1 . Cependant , A ne contient aucun intervalle .

b) Il existe un élément de $\mathfrak{J}_{2^n-1}$ qui n'appartient pas à E_n . Dans ce cas, on peut le numéroter I^{p-1} et prendre $p'_i = p^i$, car à un x ayant deux développements correspond au plus une trajectoire dans E_n .

Quel que soit $I(0)$, il existe k tel que $I(0) + kI^{p-1} \notin E_n$ donc quel que soit $I(0)$, $k_1, k_2, \ldots, k_r$, il existe

$x = \nu(I(0)) + \sum_1^r \frac{k_i}{i}$ tel que l'équation (1.2) ne soit pas satisfaite A ne contient aucun intervalle.

Supposons qu'aucun des F_k ne soit absorbant. (Si F_k est absorbant on étudie séparément et par une méthode analogue les trajectoires qui y aboutissent) . Considérons la suite d'ensembles

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{2^n-1}$$

$A_1 = (I(0) + \mathfrak{J}) \cap E_n$ $\qquad$ $B_1 = (I(0) + \mathfrak{J}) \cap \complement E_n$

$A_r = (A_{r-1} + \mathfrak{J}) \cap E_n$ $\qquad$ $B_r = (A_{r-1} + \mathfrak{J}) \cap \complement E_n$

L'ensemble $A \cap [\nu(I(0)) , \nu(I(0)) + 1]$ a pour mesure

$$I - \sum_1^\infty \frac{n(B_r)}{p^r}$$

où $n(B_r)$ désigne le nombre de trajectoires de longueur r qui aboutissent dans B_r .

De $n(A_r) + n(B_r) = n(A_{r-1} + \mathcal{J}) = p\, n(A_{r-1})$

on déduit

$$\frac{n(B_r)}{p^r} = 1 - \lim_{r \infty} \frac{n(A_r)}{p^r}$$

L'étude de $\lim_{r \infty} \frac{n(A_r)}{p^r}$ se ramène à l'étude d'une barrière absorbante pour une chaine homogène dans l'espace à l'aide des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 8.1 - $\lim_{r \infty} \frac{n(A_r)}{p^r}$ est nulle ou positive indépendamment de $I(0)$.

En effet,

$J(0) - I(0) \in E_n \Longrightarrow n_{J_o}(A_r) \geqslant n_{I_o}(A_r)$ quel que soit r , donc

$$\lim_{r \infty} \frac{n_{J_o}(A_r)}{p^r} \geqslant \lim_{r \infty} \frac{n_{I_o}(A_r)}{p^r}$$

d'autre part

$$\frac{n_{I_o}(A_r)}{p^r} = \sum_{I \in A_q} \frac{n_I(A_{r-q})}{p^{r-q}} \frac{n_{I_o}(\{I\})}{p^q}$$

et en faisant tendre $r \longrightarrow \infty$, q restant fixé ,

$$\frac{n_{I_o}(A_r)}{p^r} \longrightarrow 0 \quad \text{entraine} \quad \frac{n_I(A_{r-q})}{p^{r-q}} \longrightarrow 0$$

pour tout I tel que

$n_{I_o}(\{I\}) > 0$, donc en vertu de ce qui précède pour tout $I \in E_n$ si $\mathcal{J} \cap E_n$ n'est pas vide.

On est donc ramené à étudier une chaine dont les probabilités de passage π_I^J sont données par :

$$\pi_I^J = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{si } J-I \in \mathcal{J} \text{ et } J \in E_n \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

une telle chaine est donc homogène dans l'espace. De plus, si toutes les coordonnées de I sont assez grandes, $J - I \in \mathcal{J} \Longrightarrow J \in E_n$ et la i-ème coordonnée I_i de I évolue aussi suivant une chaine homogène dans l'espace , ce qui démontre la proposition 8.2

PROPOSITION 8.2 : $\lim_{r \to \infty} \frac{n(A_r)}{p^r} > 0$ si et seulement s'il existe une probabilité strictement positive de survie pour les n chaines attachées aux projections de I .

Nous sommes donc amenés à étudier une chaine homogène de dimension 1 et d'après la proposition 1 , on peut prendre 0 comme état initial. Une telle chaine est définie par la donnée des deux polynomes

$$\Phi_1(u) = \sum_{j \geq 0} \pi_j u^j \qquad \text{et} \qquad \psi_1(u) = \sum_{j \leq -1} \pi_j u^j$$

avec

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad \text{et} \qquad \pi_j > 0 \quad \text{pour un} \quad j \neq 0 \quad \text{(si on la chaine est triviale).}$$

Les probabilités de passage π_i^j sont données par $(i \geq 0)$

$$\pi_i^j = \begin{cases} \pi_{j-i} & \text{si} \quad j \geq 0 \\ 0 & \text{dans le cas contraire .} \end{cases}$$

Utilisant une idée analogue à celle des images en electrostatique, (cf. [5]) , nous considérons simultanément le processus adjoint dont les probabilités de passage π^{*j}_i sont données par $(i \leq o)$

$$\pi^{*j}_i \quad \begin{cases} \pi_{j-i} & \text{si} \quad j < 0 \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Si l'état initial est 0 , les fonctions génératrices de l'état à l'instant n des deux processus sont définies respectivement par les relations de récurrence :

$$\Phi_n(u) = \left\{ [\Phi_1(u) + \Psi_1(u)]\ \Phi_{n-1}(u) \right\}^+$$

$$\Psi_n(u) = [(\Phi_1(u) + \Psi_1(u))\ \Psi_{n-1}(u)]^-$$

où nous notons $[\ ]^+$, $[\ ]^-$ les opérations

$$[\sum_{-k}^{n} a_i\, x^i]^+ = \sum_{0}^{n} a_i\, x^i$$

$$[\sum_{-k}^{n} a_i\, x^i]^- = \sum_{-k}^{-1} a_i\, x^i$$

qui associent à un polynôme généralisé, la somme des monomes de degré positifs (respectivement strictement négatifs).

PROPOSITION 8.3 -

$$(F\ G^-)^+ = (F^+\ G^-)^+ \ , \quad (F\ G^+)^- = (F^-\ G^+)^-$$

quels que soient les polynomes généralisés F et G .

En effet,

$$(F\ G^-)^+ = (F^+\ G^-)^+ + (F^-\ G^-)^+ = (F^+\ G^-)^+$$

$$(F\ G^+)^- = (F^-\ G^+)^- + (F^+\ G^+)^- = (F^-\ G^+)^-$$

car $(F^-\ G^-)^+ = (F^+\ G^+)^- = 0$

PROPOSITION 8.4 -

$$(\Phi_1(u) + \Psi_1(u))^n = \Phi_n(u) + \Psi_n(u) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u)\ \Psi_{n-i}(u)$$

Montrons cette proposition par récurrence sur :

Soit $F(u) = \Phi_1(u) + \Psi_1(u)$ $\quad \Phi_0 = 1 \quad \Psi_0 = 1$

et $F^n = \sum_{0}^{n} \Phi_i\ \Psi_{n-i}$

$$F^{n+1} = \sum_{0}^{n} [F \Phi_i \psi_{n-i}]^- + [F \Phi_i \psi_{n-i}]^+$$

$$= (F\psi_n)^- + \sum_{1}^{n} (F \Phi_i \psi_{n-i})^- + F(\Phi_{i-1} \psi_{n-i+1})^+ + (F \Phi_n)^+$$

et d'après la proposition 8.3. et la définition de Φ_i et de ψ_i

$$(F \Phi_i \psi_{n-i})^- = ((F\psi_{n-i})^- \Phi_i)^- = (\psi_{n-i+1} \Phi_i)^-$$

$$(F \Phi_{i-1} \psi_{n-i+1})^+ = ((F \Phi_{i-1})^+ \psi_{n-i+1})^+ = (\Phi_i \psi_{n-i+1})^+$$

d'où

$$F^{n+1} = \psi_{n+1} + \sum_{1}^{n} \Phi_i \psi_{n-i+1} + \Phi_{n+i}$$

PROPOSITION 8.5 - Les trois seuls cas possibles sont :

a) $\Phi_n(1) \longrightarrow L > 0$ $\qquad \sum_{1}^{\infty} \psi_n(1) = \frac{1 - L}{L}$

b) $\psi_n(1) \longrightarrow L > 0$ $\qquad \sum_{1}^{\infty} \Phi_n(1) = \frac{1 - L}{L}$

c) $\Phi_n(1)$ et $\psi_n(1)$ tendent vers zéro , mais $\sum \Phi_n(1)$ et $\sum \psi_n(1)$ divergent.

En effet , de $\Phi_n(u) \leq F(u) \Phi_{n-1}(u)$

$\psi_n(u) \leq F(u) \psi_{n-1}(u)$

et $F(1) = 1$

il résulte que $\{\Phi_n(1)\}$ et $\{\psi_n(1)\}$ sont deux suites décroissantes positives. Soient L et M leurs limites ≥ 0 , on a , d'après la proposition 8.4

$$1 \geq L + M + (n-1) L M$$

donc $L M = 0$

Soit $M = 0$ et $L \neq 0$ $\qquad 1 \geq L + L \sum_{1}^{n-1} \psi_1(1)$

donc $\sum_{1}^{\infty} \psi_i(1)$ existe et $\sum_{1}^{\infty} \psi_i(1) = \dfrac{1 - L}{L}$

de même, si $L = 0$, $M \neq 0$.

Si $L = M = 0$ et si $\Sigma \Phi_i(1)$ ou $\Sigma \psi_i(1)$ convergeaient, alors

$$\Phi_n(1) + \psi_n(1) + \sum_{1}^{n-1} \Phi_i(1)\, \psi_{n-i}(1) \longrightarrow 0$$

ce qui est en contradiction avec la proposition 8.2

THEOREME 8.1.- On est dans le cas a si $F'(1) = E(j - i) > 0$

b si $F'(1) < 0$

c si $F'(1) = 0$.

En effet, si $F'(1) > 0$, il existe $u < 1$ tel que $F(u) < 1$ donc $\psi_n(u) \leq (F(u))^n$ est le terme général d'une série convergente et a fortiori $\psi_n(1) < \psi_n(u)$.

Si $F'(1) < 0$, il existe $u > 1$ tel que $F(u) < 1$ et $\Phi_n(1) < \Phi_n(u) \leq F(u)^n$ est le terme général d'une série convergente.

Si $F'(1) = 0$, nous avons supposé qu'il existe toujours $\pi_j > 0$ avec $j \neq 0$ donc $F''(u) > 0$ et F passe par un minimum strict A pour $u = 1$.

Posons $G_n(u) = \dfrac{\Phi_n(u)}{(F(u))^n}$ $\qquad$ $H_n(u) = \dfrac{\psi_n(u)}{(F(u))^n}$

On déduit de la proposition 8.4

$$G_n(u) + H_n(u) + \sum_{1}^{n-1} H_i(u)\, G_{n-i}(u) = 1$$

Par ailleurs

$$G_n(u) = \frac{[\bar{\Phi}_{n-1}(u)\, F(u)]^+}{(F(u))^n} \leq \frac{\bar{\Phi}_{n-1}(u)\, F(u)}{(F(u))^n} = G_{n-1}(u)$$

quel que soit $u > 0$.

De même

$$H_n(u) \leq H_{n-1}(u)$$

Pour $u < 1$

$$G_n(u) < \frac{\bar{\Phi}_n(1)}{(F(u))^n} < \frac{1}{(F(u))^n}$$

est le terme général d'une série convergente et $H_n(u)$ tend vers une limite $L(u) > 0$, pour $u > 1$ $\sum H_n(u)$ converge et $G_n(u)$ tend vers $l(u) > 0$;

$$G'_n(u) = \frac{\bar{\Phi}'_n(u)}{(F(u))^n} - \frac{nF'(u)\,\bar{\Phi}_n(u)}{(F(u))^{n+1}} \geq 0 \qquad \text{pour } u \leq 1$$

Or

$$\bar{\Phi}'_n(u) = (F\,\bar{\Phi}_{n-1})' - ((F\,\bar{\Phi}_{n-1})^-)'$$

et si

$$(F\,\bar{\Phi}_{n-1})^- = \sum_1^k a_i\, u^{-i}$$

$$-(F\,\bar{\Phi}_{n-1})^-)' = \sum_1^k i\, a_i\, u^{-i+1} \leq \frac{k}{u}\,(F\,\bar{\Phi}_{n-1})^-$$

où k est le degré de Ψ_1 . D'où $\bar{\Phi}'_n(u) \leq F'(u)\,\bar{\Phi}_{n-1}(u) + F(u)\bar{\Phi}'_{n-1}(u)$ $+ \frac{k}{u}\,(F\,\bar{\Phi}_{n-1} - \bar{\Phi}_n)$ et

$$G'_n(u) \leq G'_{n-1}(u) + \left(\frac{k}{u} + \frac{n\,F'}{F}\right)(G_{n-1} - G_n)$$

et pour $u \leq 1$

$$F'(u) \leq 0 \qquad G_{n-1} - G_n > 0$$

d'où

$$G_n'(u) \leq G_1'(u) + \frac{k}{u}\,(G_1(u) - G_n(u))$$

$$\leq G_1'(u) + \frac{k}{u}\,G_1(u) \ .$$

Le second membre est borné sur un intervalle $[u_o\ ,\ 1]$ et

$$G_n(1) \leq G_n(u_o) + K(1 - u_o)$$

peut être rendu arbitrairement petit ; donc $G_n(1) = \tilde{\phi}_n(1) \longrightarrow 0$ quand n augmente indéfiniment.

On obtient le même résultat pour H_n . Toutefois le calcul est légèrement différent car $(F\,\psi_{n-1})^+$ contient un terme de degré 0 et on utilise la majoration

$$(u\,(F\,\psi_{n-1})^+)' \leq k_1(F\,\psi_{n-1})^+$$

Le théorème résulte alors de la proposition 8.5.

9 - ENSEMBLES DE SEJOUR ET MESURE DEFINIE SUR R^+ PAR LA CHAINE

Considérons la mesure définie sur R^+ par

$$(9.1) \qquad P\left\{ \nu((I_o)) \leq y < \nu(I_o) + 1 \right\} = \pi(I_o)$$

probabilité que l'état initial soit I_o , que nous supposerons positive (> 0) quel que soit $I_o \in E_n$.

$$9.2) \qquad P\left\{ \nu(I_o) + \frac{k_1}{p_1'} \leq y < \nu(I_o) + \frac{k_1+1}{p_1'} \right\} = \pi(I_o)\ \pi_{I_o}^{I_1}$$

où $I_1 - I_o = I^{k_1}$

$$(9.3) \qquad P\left\{ \nu(I_o) + \sum_1^r \frac{k_i}{p_i'} \leq y < \pi(I_o) + \sum_1^r \frac{k_i}{p_i'} + \frac{1}{p_r'} \right\}$$

$$= \pi(I_o)\ \pi_{I_o}^{I_1} \ \ldots\ \pi_{I_{(r-1)}}^{I_{(r)}}$$

Les $\pi(I_o)$ et $\pi^{I_1}_{I_o}$ sont entièrement déterminés par (9.1) et (9.2)

Si $\pi(I_o) > 0$, $\forall I_o$ et (9.3) peut s'interpréter comme une condition de compatibilité pour P.

La mesure P a pour support la fermeture $\bar{A}$ de A car quel que soit $x \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle de longueur ε contenant x et de mesure strictement positive.

Associons à un sous-ensemble S de E_n , le sous-ensemble Σ_r de R^+ composé des trajectoires dont les r premiers éléments appartiennent à S et soit $\Sigma = \bigcap_r \Sigma_r$, et inversement associons à $\Sigma < A$ l'ensemble S de tous les $I \in E_n$ qui figurent dans les trajectoires de Σ .

PROPOSITION 9.1 - S est de séjour si et seulement si $P(\Sigma) > 0$.

En effet,

$$P(\Sigma_r) = \sum_{I \in S} \pi(I)\, \pi^{r\ S}_{S\ I}$$

si S est de séjour, il existe $I \in S$ tel que

$$\pi^{r\ S}_{S\ I} \geq \eta > 0 \quad \text{quel que soit } r$$

donc

$$P(\Sigma_r) \geq \pi(I)\,\eta \qquad \text{quel que soit } r$$

or les Σ_r forment une suite décroissante donc

$$P(\Sigma) > 0$$

Réciproquement, soit K un sous-ensemble fini de E_n tel que

$$\sum_{I \notin K} \pi(I) < \frac{P(\Sigma)}{2}$$ on en déduit

$$\sum_{I \in K \cap S} \pi^{r\ S}_{S\ I}\, \pi(I) > \frac{P(\Sigma)}{2} \tag{9.4}$$

donc il existe $I \in K \cap S$ tel que $\pi_S^{r\ S}_{\ I} > \frac{P(\Sigma)}{2}$ quel que soit

r sinon quel que soit $I \in K \cap S$ il existerait $r(I)$ tel que

$$\pi_S^{r(I)\ S}_{\ I} \leq \frac{P(\Sigma)}{2}$$

donc tel que

$$\pi_S^{r\ S}_{\ I} \leq \frac{P(\Sigma)}{2} \qquad \text{pour} \qquad r \geq r(I)$$

et comme $K \cap S$ est fini, pour $r \geq \sup_{I \in K \cap S} r(I)$ on aurait

$$\pi_S^{r\ S}_{\ I} < \frac{P(\Sigma)}{2}$$

qui contredit 9.4 - S est donc de séjour.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

1] FORTET, R. - "Les processus stochastiques en cascade " Trabajos de Estadisticas Vol 4 (1953) - pp. 11-34

2] HENNEQUIN ,P.L.- "Trajectoires définies par un semi-groupe d'applications d'un ensemble dans lui-même " Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris , t. 248, pp. 3108-3110 - Séance du 1er juin 1959.

3] KENDALL, D.J. - "Les processus de croissance en biologie " Annales de l'Institut Henri Poincaré, 13 , n° 1 , (1952) pp.43-108

4] NEYMAN, J.,PARK, T. , SCOTT, E.L "Struggle for existence, the tribolium model : biological and statistical aspects" - Third Berkeley symposium , vol. IV, pp. 41-79 .University of California 1956.

5] TORTRAT, A. - " Etude d'une méthode d'itération propre à certaines matrices - Application aux processus de Markoff correspondants, cas des processus continus homogènes par rapport à l'espace ,cas non homogène." Publications Scientifiques de l'Université d'Alger - Tome n° 2 (Décembre 1957) pp. 145-189.

C H A P I T R E II

CHAINES DE MARKOFF EN CASCADE HOMOGENES SUR UN GROUPE COMMUTATIF

I - DEFINITION

Nous dirons qu'une chaine de Markoff est en cascade et homogène sur un semi-groupe F si l'espace des états est muni d'une structure de semi-groupe commutatif dont l'opération sera notée additivement et si la probabilité de passage Π_I^{I+K} de l'état I à l'état $I + K$ est :

a) indépendante de I : $\Pi_I^{I+K} = A_K$ quel que soit $K \in F$;

b) nulle sauf pour un nombre fini k si $A_o = 0$, $k + 1$ si $A_o \neq 0$, de valeurs de K .

G étant le plus petit groupe contenant F , il est toujours possible d'associer à une chaîne en cascade homogène définie sur F la chaîne en cascade homogène définie sur G par

$$\Pi_I^{I+K} = A_K \quad \text{quel que soit} \quad I \in G$$

2 - CARACTERISATION ET CONSTRUCTION

Considérons une chaîne de Markoff dont les états sont repérés par un entier positif. Elle pourra être considérée comme chaîne en cascade homogène sur un semi-groupe F s'il est possible de définir un semi-groupe F et une bijection Φ de l'ensemble des entiers positifs E sur F tel que les conditions de la définition 1 soient satisfaites.

On en déduit les conditions nécessaires suivantes :

C1 - Quel que soit $i \in E$, $\Pi_i^j = 0$ sauf pour un nombre fini k (resp. $k+1$) de valeurs de j :

(resp. $j_o = f_o(i) = i$), $j_1 = f_1(i), \ldots, j_k = f_k(i)$

distincts tels que $\Pi_i^{f_r(i)} = p_r$ indépendant de i ($p_r > o$, $\sum p_r = 1$).

Soit Φ la bijection de E sur F, a) et C1 impliquent :

$$\Phi(f_r(i)) - \Phi(i) = \Phi(f_r(j)) - \Phi(j) \qquad \forall i,j \in E \text{ et } r \tag{2.1}$$

ou

$$\Phi(f_r(i)) - \Phi(f_r(j)) = \Phi(i) - \Phi(j) \tag{2.2.}$$

donc $f_r(i) = f_r(j)$ entraine $i = j$ ou encore

C2 - Les f_r sont injectifs.

D'autre part, en faisant $i = f_q(j)$ dans (2.1)

$$\Phi(f_p \circ f_q(j)) = \Phi(f_q(j)) + \Phi(f_p(j)) - \Phi(j) \tag{2.3}$$

donc, puisque F est commutatif :

C3 - $$f_p \circ f_q = f_q \circ f_p \quad \text{quels que soient } p \text{ et } q \text{ .} \tag{2.4}$$

S'il existe $i \in E$ et $n_1, n_2, \ldots, n_k$; $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k$ entiers ≥ 0 tels que

$$(2.5) \qquad f_1^{n_1} \circ f_2^{n_2} \circ \dots \circ f_k^{n_k}(i) = f_1^{n'_1} \circ f_2^{n'_2} \circ \dots \circ f_k^{n'_k}(i)$$

on a en vertu de (2.3) et (2.1) :

$$\Phi(f_1^{n_1} \circ \dots \circ f_k^{n_k}(i)) - \Phi(i) = \sum_1^k n_j(\Phi(f_j(i)) - \Phi(i))$$

$$= \sum_1^k n_j(\Phi(f_j(i')) - \Phi(i'))$$

$$= \sum_1^k n'_j(\Phi(f_j(i)) - \Phi(i)) = \sum_1^k n'_j(\Phi(f_j(i')) - \Phi(i'))$$

quel que soit $i' \in E$. Par conséquent :

C4 - S'il existe $i \in E$ tel que $f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k}(i) = f_1^{n'_1} \dots f_k^{n'_k}(i)$

cette relation est vraie quel que soit $i \in E$.

Nous dirons qu'un élément $i \in E$ est lié à j s'il existe $n_1, n_2, \dots, n_k$; $n'_1, n'_2, \dots, n'_k \geq 0$ tels que :

$$(2.6.) \qquad f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_k^{n_k}(i) = f_1^{n'_1} f_2^{n'_2} \dots f_k^{n'_k}(j)$$

Posons

$$\Phi(f_p(0)) = I_p , \quad \Phi(0) = I_o .$$

On déduit de (2.6.) appliquée dans le cas particulier $j = 0$:

$$(2.7) \qquad \Phi(i) = I_o + \sum_1^k{}'(n'_p - n_p)(I_p - I_o) .$$

Soit E_o le sous-ensemble de E formé par les éléments liés à 0 , et soit $\mathcal{G}_o = \Phi(E_o)$ son image dans G . $\mathcal{G}_o$ est contenu dans le sous-groupe G_o de G engendré par les $I_p - I_o$.

La structure de G_o est déterminée par les relations (2.5) (cf.[9]).

En effet, l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_k)$ tels que

$$(2.8) \qquad \sum_{p=1}^{k} \lambda_p (I_p - I_o) = 0$$

forme un sous-module du module des suites de k entiers. Ce sous-module admet une base formée de m éléments

$$\sigma^r = (\sigma_1^r , \sigma_2^r , \dots , \sigma_k^r) \qquad 1 \leq r \leq m \leq k$$

telle que le système

$$(2.9) \qquad \sum_{p=1}^{k} \sigma_p^r (I_p - I_o) = 0 \qquad 1 \leq r \leq m \leq k$$

soit équivalent au système des équations (2.8) . On peut alors déterminer deux matrices inversibles à coefficients entiers μ et ν respectivement (m , m) et (k , k) , telles que $\mu \sigma \nu$ soit une matrice diagonale

où d_i divise d_j si $i < j$ et où $1 \leq m$.

Soient ν'^q_p les éléments de ν^{-1} et

$$(2.10) \qquad I'_p - I_o = \sum_{q=1}^{k} \nu'^q_p (I_q - I_o)$$

(2.9) est équivalent au système

$$(2.11) \qquad d_r (I'_r - I_o) = 0 \qquad 1 \leq r \leq l$$

Soit t le nombre des i tels que $d_i = 1$: $d_1 = d_2 = \dots = d_t = 1$ $I'_r = I_o$ si $r \leq t$. G_o est engendré par les éléments $(I'_r - I_o)$ pour $t+1 \leq p \leq m$ et est isomorphe au produit de $l-t$ groupes cycliques d'ordre $d_{t+1} , \dots , d_l$ et de $m-l$ groupes cycliques infinis.

Soit E_o , E_1, E_2 , ... , la partition de E définie par la relation d'équivalence i j si i est lié à j . On peut plonger chaque E_j dans un groupe G_j qui a la même structure que G_o en vertu de la condition C4.

On peut donc plonger E dans le produit de G_o par un groupe cyclique fini ou infini. En fait quand on connaît l'état initial , l'évolution de la chaîne se fait à l'intérieur du groupe G_i qui le contient et on peut se limiter à l'étude d'une chaîne sur un tel groupe.

G désignera donc dans les paragraphes suivants la somme directe de l groupes dont les r premiers sont isomorphes au groupe des entiers et le $(r+1)^{ième}$ au groupe des entiers modulo d_i où d_i divise d_{i+1}. L'élément neutre de G sera noté 0 .

3 - LA FRONTIERE DE FELLER

Nous allons rappeler brièvement la construction de la frontière introduite par Feller ([5]).

Une chaîne sur un ensemble dénombrable E étant définie par sa matrice des probabilités de passage Π nous dirons qu'un sous-ensemble A de E est de séjour s'il existe une probabilité positive d'y rester indéfiniment. Soit $s_A(I)$ cette probabilité quand l'état initial est I ; A est équivalent à E si $s_A(I) = 1$ quel que soit $I \in E$.

Soit M l'ensemble des solutions positives, bornées ou non, de $\Pi Z = Z$. M est muni de la relation d'ordre : $Z \leqslant Z'$ si et seulement si $Z_I \leqslant Z'_I$ quel que soit $I \in E$. Nous appellerons avec NEVEU (11) bande positive de M un sous-ensemble B de M tel que :

a) $Z \in B \implies t\,Z \in B$ quel que soit $t \geqslant o$

b) $Z \in B$, $Z' \in M$, $Z' \leqslant Z \implies Z' \in B$

c) tout sous-ensemble de B majoré dans M admet une borne supérieure dans B .

Nous dirons qu'une telle bande B est maximale par rapport à $Z \in M$ si Z n'appartient pas à B , mais appartient à toute bande B' contenant strictement B . Soit $\mathcal{B}^*$ l'ensemble de toutes les bandes maximales par rapport à un $Z \in M$ quand Z parcourt M .

Etant donné $Z \in M$, $Z_I > 0$, pour tout $I \in E$, on peut lui associer une nouvelle matrice de probabilité Π' définie par

$$\Pi'^{J}_{I} = \Pi^{J}_{I} \frac{Z_J}{Z_I}$$

un sous-ensemble A sera appelé support de Z si A est équivalent à E pour la chaîne définie par Π'. Nous pouvons alors adjoindre aux éléments de E les éléments de $\mathcal{B}^*$ et munir l'ensemble $E + \mathcal{B}^*$ ainsi obtenu d'une topologie.

DEFINITION 3.1. - $\Omega \subset E + \mathcal{B}^*$ est ouvert si à tout point $\omega \in \Omega \cap \mathcal{B}^*$ on peut associer $Z \in M$ tel que :

a) ω est une bande maximale par rapport à Z.
b) $\Omega \cap E$ est un support de Z.
c) $\Omega \cap \mathcal{B}^*$ contient toute $\beta \in \mathcal{B}^*$ maximale par rapport à $Y \leq Z$.

On montre que l'espace topologique ainsi défini est séparé.
Nous allons déterminer la frontière de Feller pour un processus en cascade homogène sur un groupe G. L'équation $\Pi Z = Z$ prend la forme

$$\sum_{K \in \mathcal{J}} A_K Z_{I+K} = Z_I \qquad I \in G$$

où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de G. Soit $n\mathcal{J}$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{1}^{n} I_k$ où $I_k \in \mathcal{J}$, $0\mathcal{J} = \{0\}$ et soit $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} n\mathcal{J}$. F est l'ensemble des états qu'on peut atteindre à partir de 0. Nous sommes amenés à distinguer deux cas : $F = G$ et $F \neq G$.

4 - ETUDE DE M QUAND F = G

$Z_I = 0$ entraine $Z_{I+K} = 0$ pour $K \in \mathfrak{J}$ donc pour $K \in G$ et tout élément de M est de la forme λZ où $\lambda > 0$ et Z appartient au sous-ensemble C_o de M défini par $Z_o = 1$. C_o est compact pour la topologie faible ; en effet, si $J \in n\mathfrak{J}$:

$$(4,1) \qquad 0 < Z_J \leq \frac{1}{(\operatorname{Inf}_J A_j)^n}$$

et C_o est fermé puisque $\mathfrak{J}$ est fini. C_o est convexe ; soit Z^* un de ses éléments extrémaux , c'est dire que

$$Z^* = \lambda Z^1 + \mu Z^2 \qquad \text{avec} \quad \lambda \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad \lambda + \mu = 1$$
$$Z^1 \in C_o \,, \quad Z^2 \in C_o$$

entraine $Z^1 = Z^2 = Z^*$.

Soit pour $J_o \in \mathfrak{J}$, X^{J_o} l'élément de $(R^+)^G$ défini par

$$(4.2.) \qquad X_I^{J_o} = \frac{Z^*_{I+J_o}}{Z^*_{J_o}}$$

X^{J_o} appartient à C_o , en effet :

$$(4.3) \qquad \sum_K A_K X^{J_o}_{I+K} = \frac{\sum_K A_K Z^*_{I+K+J_o}}{Z^*_{J_o}} = \frac{Z^*_{I+J_o}}{Z^*_{J_o}} = X_I^{J_o}$$

et

$$X_o^{J_o} = 1$$

Par ailleurs $Z^* = \sum_{J \in \mathfrak{J}} A_J Z^*_J X^J$ où $A_J Z^*_J \geq 0$

et $\sum_{J \in \mathfrak{J}} A_J Z^*_J = 1$ donc puisque Z^* est extrémal $X^J = Z^*$ quel que soit $J \in \mathfrak{J}$. D'où

$$(4.4) \qquad Z^*_{I+J} = Z^*_I \; Z^*_J \qquad \text{pour } J \in \mathfrak{J} \;,\; I \in G$$

et par récurrence sur n pour $J \in n\mathfrak{J}$ donc pour $J \in G$, $I \in G$,
Soit C^*_o le sous-ensemble de C_o défini par (4.4) c'est-à-dire que

$$(4.4) \qquad Z^*_{I+J} = Z^*_I \; Z^*_J \qquad Z^*_I \geqslant 0$$

$$(4.5) \qquad Z^*_o = 1$$

$$(4.6) \qquad \sum_{K \in \mathfrak{J}} A_K \, Z^*_{I+K} = Z^*_I \qquad \text{ou compte tenu de (4.3)}$$

$$(4.7) \qquad \sum_{K \in \mathfrak{J}} A_K \, Z^*_K = 1 \;;$$

C^*_o est fermé.

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_l$; la base de G . Posons

$$(4.8) \qquad \operatorname{Log} Z^*_{E_k} = u_k$$

alors, en appelant I^k la $k^{\text{ième}}$ composante de I : $I = \sum_1^k I^k E_k$
et en posant $\sum_1^l I^k u_k = I.U$ (4.4) et (4.5) sont équivalentes à

$$(4.9) \qquad Z^*_I = \prod_1^I (Z^*_{E_k})^{I^k} = e^{I.U}$$

et (4.6) est équivalent à :

$$(4.10) \qquad \sum_{K \in \mathfrak{J}} A_K \, e^{K.U} = 1$$

Remarquons que $u_i = 0$ pour $i > r$; en effet, (4.4) et (4.5) impliquant :

$$1 = Z^*_o = Z^*_{d_i E_{r+i}} = (Z^*_{E_{r+i}})^{d_i}$$

d'où puisque

$$Z^*_{E_{r+i}} \geqslant 0 \;,\; d_i > 1 \;\; Z^*_{E_{r+i}} = 1 \text{ et } u_{r+i} = 0$$

PROPOSITION 4.1

(4.8) établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre C_o^* et la variété V de R^r définie par :

(4.11) $\sum_{K \in \mathcal{J}} A_K \, e^{\bar{K}.U} = 1$ où $\bar{K}$ désigne la projection de K sur R^r : $\bar{K} = (K^1, K^2, \ldots, K^r)$.

La continuité de l'application $U \longrightarrow Z$ résulte de la continuité de l'exponentielle. Celle de l'application $Z \longrightarrow U$ de la continuité du logarithme car Z_J est borné par (4.1) donc :

$$Z^*_{-J} = \frac{1}{Z^*_J}$$

est borné inférieurement par un nombre strictement positif donc les $Z^*_{I_K}$ appartiennent à un intervalle compact de continuité du logarithme.

PROPOSITION 4.2.

Le sous-ensemble D de R^r défini par

(4.12) $\sum_{K \in \mathcal{J}} A_K \, e^{\bar{K}.U} \leq 1$ est convexe.

En effet, soit $0 \leq \lambda \leq 1$; la convexité de la fonction exponentielle implique :

$$e^{\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2} \leq \lambda e^{u_1} + (1-\lambda) e^{u_2} \; ; \quad \forall u_1 \, u_2 \text{ réels}$$

Soit alors $U_1 , U_2 \in D$; $\lambda U_1 + (1-\lambda) U_2 \in D$ car

$$\sum_{K \in \mathcal{J}} A_K \, e^{\bar{K}(\lambda U_1 + (1-\lambda) U_2)} \leq \lambda \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K \, e^{\bar{K}.U_1} + (1-\lambda) \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K e^{\bar{K}.U_2} \leq 1$$

PROPOSITION 4.3

La condition nécessaire et suffisante pour que C_o^* soit réduit à un seul point est que

(4.12) $\sum_{K \in \mathcal{J}} \bar{K} \, A_K = 0$

En effet , soit

$$(4.13) \qquad \Phi(U) = \sum_{K \in \mathfrak{D}} A_K \, e^{\overline{K}.U}$$

$$(4.14) \qquad \text{Grad } \Phi(U) = \sum_{K \in \mathfrak{D}} \overline{K} \, A_K \, e^{\overline{K}.U}$$

V contient le point $U = 0$; si elle ne contient que ce point Grad $\Phi(U) = 0$ et la condition est nécessaire.

Elle est suffisante car

$$(4.15) \qquad \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \, \partial u_j} \lambda_i \lambda_j = \sum_{K \in \mathfrak{D}} \sum_{i,j} \overline{K}^i \overline{K}^j A_K \, e^{\overline{K}U} \lambda_i \lambda_j$$

$$= \sum_{K \in \mathfrak{D}} A_K \left(\sum_i \overline{K}^i \lambda_i \right)^2 e^{\overline{K}U}$$

est une forme quadratique positive non dégénérée car $\mathfrak{D}$ engendre G donc quand K parcourt $\mathfrak{D}$ l'ensemble des $\overline{K}$ engendre R^r et $\sum_i \overline{K}^i \lambda_i = 0$ quel que soit $K \in \mathfrak{D} \Longrightarrow \lambda_i = 0$. Il en résulte que grad $\Phi(U) = 0$ implique que $U = 0$ est un minimum strict pour Φ . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(U) > 1$ pour $|U| < \varepsilon$, $U \neq 0$ donc pour tout $U \neq 0$ puisque D est convexe

La condition (4.12) admet une interprétation très simple ; elle exprime que la restriction de la chaîne à $\mathfrak{N}^r$ est une martingale .

PROPOSITION 4.4.

Si $\sum \overline{K} A_K \neq 0$

$$(4.16) \qquad U \longrightarrow \frac{\text{grad } \Phi(U)}{|\text{grad } \Phi(U)|}$$

établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre V et la sphère S de centre 0 de rayon 1 de R^r .

La démonstration de la proposition (4.3) montre que si V contient plus d'un point, grad $\Phi(U) \neq 0$ en tout point de V donc à $U \in V$ correspond un point bien déterminé de S . Réciproquement, soit M un point

quelconque de S . Projetons orthogonalement D sur la droite OM . Pui Puisque D est convexe et compact (Prop. 4.1 et 4.2) sa projection est un segment fermé AB . Soit $U_1 \in V$, $U_2 \in V$ de projection A et B ; en U_1 et U_2 , grad Φ est parallèle à OM . Sur le segment U_1U_2 , $\Phi \leq 1$ donc grad $\Phi(U_1)$ et grad $\Phi(U_2)$ ont des directions opposées; soit U un point de V où grad $\Phi(U)$ a la direction et le sens de OM . U est unique car sinon enn U et U' , V aurait même plan tangent donc aussi tout le long de U U' contrairement au fait que (4.15) est non dégénérée . La bicontinuité résulte de la continuité de grad $\Phi(U)$ et de la compacité de V .

Revenons à l'ensemble M . R^{*G} muni de la topologie faible est localement convexe séparé. Par ailleurs, C_o^* contient les éléments extrémaux de C_o , C_o^* est fermé et C_o compact ; on déduit donc du théorème de Krein et Milmam ([2]) la

PROPOSITION 4.5. quel que soit $Z \in C_o$, il existe une mesure μ positive de masse totale 1 sur C_o^* telle que

$$(4.17) \qquad Z = \int_{C_o^*} Z^* \, d\mu$$

Notons $\underline{1}$ l'élément de R^G dont toutes les coordonnées sont égales à 1 $\underline{1}$ appartient à C_o^* .

PROPOSITION 4.6. - $\underline{1}$ est le seul élément borné de C_o .

En effet pour que $e^{IU} \leq M$ quel que soit $I \in G$, il est nécessaire et suffisant que $U = 0$, $\underline{1}$ est donc le seul élément borné de C_o^* . Soit Z un élément borné de C_o , on a :

$$Z = \int_{C_o^*} Z^* \, d\mu$$

donc tous les éléments du support de μ doivent être bornés ; le support de μ est réduit à $\{\underline{1}\}$ et $Z = \underline{1}$.

Corollaire - Les ensembles de séjour forment un filtre sur G .

En effet, soit $s_A(I)$ la probabilité partant de l'état I d'atteindre A et d'y rester indéfiniment. A est de séjour si $s_A(I) > 0$ $s_A \notin C_o$ et par conséquent $s_A(I) = 1$ quel que soit I .Il résulte alors d'un théorème de Feller que si A et B sont de séjour $s_{A\cap B} = \inf(s_A, s_B)$ donc $s_{A\cap B}(I) = 1$ quel que soit I et $A \cap B$ est de séjour. Par ailleurs , $A' \supset A \Longrightarrow s_{A'}(I) \geqslant s_A(I)$ donc A' est de séjour si A est dé séjour. De plus E est de séjour, donc il existe un ensemble de séjour.

Nous reviendrons à la détermination des ensembles de séjour au paragraphe 6.

PROPOSITION 4.7 -

Si $Y \leq Z^*$, $Y \in M$, $Z^* \in C_o^*$, alors $Y = k\, Z^*$.

Soit $Y_I = k \int_{C_o^*} e^{I.U}\, d\mu \qquad k > 0$

et $Z_I^* = e^{I.U_o}$

Par hypothèse

$$(4.18) \qquad \int_{C_o^*} e^{I.(U-U_o)}\, d\mu \leqslant \frac{1}{k}$$

soit $I_o = \sum_K K\, A_K\, e^{K.U_o}$

De $e^t \geqslant e^{t_o}(1 + (t - t_o))$, on déduit :

$$1 = \sum_K A_K\, e^{K.U} \geqslant \sum_K A_K\, e^{K.U_o} + \sum_K (U-U_o).K\, A_K.e^{K.U_o}$$

$$\geqslant 1 + (U - U_o)\,.\, I_o$$

D'où $I_o\,.\,(U - U_o) \leq 0 \qquad \forall\, U \in V$.

en choisissant dans (4.18) $I = \lambda I_o$ et en faisant tendre λ vers $-\infty$, on voit que le support de μ est réduit à $\{U_o\}$ donc que $Y = k\, Z^*$.

Corollaire 1 - Deux éléments distincts de C_o^* sont disjoints

En effet, s'il existe $Y \leq Z_1^*$, $Y \leq Z_2^*$, $Y \in M$, Z_1^* , $Z_2^* \in C_o^*$.

$$Y = k_1 Z_1^* = k_2 Z_2^* \quad \text{d'où} \quad Z_1^* = Z_2^* \ .$$

Corollaire 2

C_o^* est l'ensemble des éléments extrémaux de C_o.

Nous savons que tout élément extrémal de C_o appartient à C_o^* . Réciproquement soit $Z^* \in C_o^*$

$$Z_o^* = \lambda Z_1 + (1 - \lambda)\, Z_2 \ , \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Z_1 , $Z_2 \in C_o$ entraine

$$Z^* \geq \lambda Z_1$$

donc , d'après la proposition (4.7)

$$Z^* = Z_1 = Z_2$$

et Z^* est extrémal .

PROPOSITION 4.8

(4.17) $$Z = \int_{C_o^*} Z^* \, d\mu \qquad \text{et}$$

(4.19) $$Z_K = \int_V e^{\overline{KU}} \, d\nu$$

établissent deux isomorphismes entre M et l'ensemble réticulé des mesures positives sur C_o^* (resp. sur V) .

Cette proposition se déduit d'un théorème de CHOQUET [3] , qu'on peut appliquer puisque M est réticulé.

Il en résulte qu'on peut considérer la frontière de Feller comme l'ensemble des bandes positives maximales construires sur l'ensemble des mesures positives sur le compact C_o^* (ou V) .

Corollaire : Quel que soit $Z_o^* \in C_o^*$; il n'existe qu'une bande $B_{Z_o^*}$ maximale par rapport à Z_o^* : $Y = \int_{C_o^*} Z^* \, d\mu$ appartient à $B_{Z_o^*}$ si et seulement si μ n'a pas son support réduit à Z_o^* .

On peut donc considérer les points $B_{Z_o^*}$ de la frontière comme des p points isolés de la frontière munie de la topologie induite et identifier ces points avec les points C_o^* ou de V . La détermination de leurs voisinages se ramène à la détermination des ensembles de séjour pour un autre processus homogène ; on déduit en effet de la définition (3.1) la

PROPOSITION 4.9

Les ensembles de séjour sont les voisinages du point $1 \in C_o^*$ ou du point $0 \in V$ considérés comme points de la frontière. Les voisinages du point $Z^* \in C_o^*$ (ou $U \in V$ tel que $Z_K^* = e^{\overline{K}.U}$) sont les ensembles de séjour pour la chaine définie par la matrice

$$(4.20) \qquad \Pi'^J_I = \Pi^J_I \frac{Z_J^*}{Z_I^*} = A_{J-I} Z_{J-I}^* = A_{J-I} e^{(\overline{J}-\overline{I}).U}$$

La matrice $\overline{\Pi}'$ est associée comme $\overline{\Pi}$ à une chaine en cascade homogène , Si $\sum_K \overline{K} A_K \neq 0$, c'est-à-dire si C_o^* a plus d'un point et si on pose

$$A'_K = A_K \, e^{\overline{K}.U}$$

on peut remarquer que

$$\sum_K \overline{K} A'_K = \sum_K \overline{K} \, A_K \, e^{\overline{K}.U} = \text{grad } \overline{\Phi}(U)$$

Donc l'espérance mathématique du pas pour la chaine définie par $\overline{\Pi}'$ a pour direction la normale à V au point U qui définit $\overline{\Pi}'$ et pour sens le sens de la normale extérieure à V . Il résulte de la proposition 4.4 que, quand U varie, on obtient toutes les directions possibles.

5) ETUDE DE LA FRONTIERE QUAND $F \neq G$

Nous pouvons sans restriction , supposer que G est le plus petit groupe qui contient F . Soit M l'ensemble des éléments Z de $(R^+)^G$ invariants par $\overline{\Pi}$, Z^+ la restriction de Z à F , M^+ l'ensemble des Z^+ . On a

$$(5.1) \qquad \sum_{K \in U} A_K \, Z_{I+K} = Z_I \qquad \text{quel que soit} \quad I \in G$$

$$(5.2) \qquad \sum_{K \in U} A_K \, Z^+_{I+K} = Z^+_I \qquad \text{quel que soit} \quad I \in F$$

Nous noterons Y un élément de $(R^+)^F$ qui satisfait (5.2)

Comme au paragraphe précédent, on démontre :

a) que $Y_o = 0$, $Y_I \geqslant 0 \Longrightarrow Y_I = 0$ quel que soit $I \in F$

b) que si l'on note C'_o l'ensemble des solutions positives de (5.2) telles que $Y_o = 1$, l'ensemble de ses éléments extrémaux C'^*_o est formé des éléments tels que

$$(5.3) \qquad Y^*_I \, Y^*_J = Y^*_{I+J} \qquad \forall \; I, J \in F \; ,$$

que C'^*_o est compact et que, par conséquent, quel que soit $Y \in C'^*_o$ il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ de masse +1 sur C'^*_o telle que :

$$(5.4) \qquad Y = \int_{C_o'^{*}} Y^{*} \, d\mu$$

Tout élément de C_o' n'est pas la restriction à F d'un élément de C_o comme le montrent les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 5.1

Une solution positive de (5.1) non identiquement nulle est telle que $Z_I \neq 0$ quel que soit $I \in G$.

F est l'ensemble des éléments $I = \sum_i \alpha_i J_i$, α_i entier $\geqslant 0$, $J_i \in \mathcal{J}$;

soit $I \in F$ tel que $\alpha_i > 0$, quel que soit i , et soit $K \in G$, alors $nI - K \in F$ pour n entier assez grand, $n'I - K \in -F$ pour n' entier assez petit; en effet, puisque $\mathcal{J}$ engendre G , $K = \sum_i \beta_i J_i$, β_i entier

et puisque $\mathcal{J}$ est fini , $n\alpha_i - \beta_i \geqslant 0$ pour $n \geqslant \sup \beta_i / \alpha_i$,

$n'\alpha_i - \beta_i \leqslant 0$, pour $n' \leqslant \inf \beta_i / \alpha_i$.

D'autre part, $Z_I > 0 \Longrightarrow Z_{I-K} \geqslant A_K \, Z_I > 0 \quad \forall K \in \mathcal{J}$

donc $Z_{I-K} > 0$ quel que soit $K \in F$.

Choisissons $I = \sum_i \alpha_i J_i$, $\alpha_i > 0$ et montrons que s'il existe un entier n tel que $Z_{nI} > 0$ alors $Z_{nI} > 0$ pour tout n entier. En effet, sinon il existerait n_o tel que $Z_{nI} = 0$ si et seulement si $n \geqslant n_o$ donc en particulier tel que $Z_{(n_o-2)I} > 0$.

Posons $$X_J = \frac{Z_{(n_o-2)I+J}}{Z_{(n_o-2)I}} \, .$$

$$X_o = 1$$

et $X^{+} \in C_o'$, donc pour $J \in F$

$$X_J = \int_{C_o'^{*}} Z_J^{*} \, d\mu \qquad ; \qquad Z_{n_o I} = 0$$

entraine

$$X_{2I} = 0 \Longrightarrow \int_{C_o'^*} (Z_I^*)^2 \, d\mu = 0 \Longrightarrow$$

$$\int_{C_o'^*} Z_I^* \, d\mu = 0 \Longrightarrow Z_{(n_o-1)I} = 0 \quad \text{d'où contradiction.}$$

Donc, ou bien $Z_I > 0$ et alors $Z_{nI} > 0$ quel que soit n ; or, quel que soit $K \in G$, il existe n tel que $nI - K = J \in F$ donc $K = nI - J$, $J \in F$, et $Z_K > 0$, ou bien $Z_I = 0$ alors $Z_{nI} = 0$ quel que soit n ; or, quel que soit $K \in G$, il existe n' tel que $n'I - K = J \in -F$ donc $K = n'I - J$, $-J \in F$ et $Z_K = 0$.

Il résulte de la proposition 5.1, que, pour que Y défini par (5.4) soit prolongeable à $(R^+)^G$, il est nécessaire que $Y_I \neq 0$ quel que soit $I \in F$.

Etant donné un élément Y^* de $C_o'^*$ tel que $Y_I^* > 0$ quel que soit $I \in F$, on peut le prolonger de façon unique par la relation $Z_I^* Z_J^* = Z_{I+J}^*$ à un élément Z^* de M. Nous noterons C_o^* l'ensemble des Z^* ainsi obtenus C_o^* est contenu dans $C_o'^*$ et l'inclusion est stricte, car, en général $C_o'^*$, contient des éléments tels que $Y_I^* = 0$ pour certains I, mais $C_o^* = C_o'^*$ comme le montre la

PROPOSITION 5.2 - Tout élément Z de M tel que $Z_o = 1$ admet la représentation intégrale unique

$$Z_I = \int_{C_o'^*} Z_I^* \, d\mu \qquad (\mu \geq 0 \text{ de masse } +1)$$

En effet $Z_I = Z_I^+ = \int_{C_o'^*} Z_I^* \, d\mu$ pour $I \in F$ et

cette représentation est unique en vertu du théorème de Choquet déjà cité [3].

Soit alors $K \in -F$. Posons $X_J^K = \frac{Z_{J+K}}{Z_K}$; il existe une mesure $\nu_K \geq 0$ de masse + 1 sur $C_o'^{*}$ telle que quel que soit $J \in F$:

$$X_J^K = \int_{C_o'^{*}} Z_J^{*} \, d\nu_K$$

D'où :

$$Z_{J+K} = Z_K \int_{C_o'^{*}} Z_J^{*} \, d\nu_K \qquad \text{quel que soit } J \in F$$

en particulier $I \in F$, $K \in -F \Longrightarrow J = I - K \in F$ et

$$Z_I = Z_K \int_{C_o'^{*}} Z_{I-K}^{*} \, d\nu_K \qquad \text{quel que soit } I \in F$$

On en déduit $Z_{I-K}^{*} \; Z_K \; \nu_K = \mu Z_I^{*}$

D'où

$$Z_{J+K} = \int_{C_o'^{*}} Z_{J+K}^{*} \, d\mu \qquad \text{quels que soient } J \in F \text{ , } K \in -F$$

Or tout élément de G peut s'écrire sous la forme J + K d'où la proposition

La proposition 5.2 montre, en particulier que μ n'est pas une mesure quelconque de masse + 1 sur $C_o'^{*}$: Z^{*J+K} doit être sommable sur $C_o'^{*}$ quel que soit K . Il en résulte que la transformation (4.9) associe à C_o^{*} une variété V et à μ une mesure ν sur V telle que :

$$Z_I = \int_V e^{I.U} \, d\nu$$

La proposition (4.2) subsiste, mais V n'est plus compacte.

Si $F \neq G$ et si on plonge $G_1 + , \ldots + G_r$ dans R_r ainsi que la partie correspondante F_r de F , il existe $V \in R_r$ différent de zéro et tel que $V.\overline{I} \geq 0$ pour tout $I \in F$. D'où $(\sum \overline{K} A_K).V \geq 0$ et même > 0 sinon $\mathcal{J}$ n'engendrerait pas G, On a donc

$\sum \bar{K} A_K \neq 0$. L'analogue de la proposition 4.4 est donc :

PROPOSITION 5.3 - $U \longrightarrow \dfrac{\operatorname{grad} \check{\Phi}(U)}{|\operatorname{grad} \check{\Phi}(U)|}$ établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre V et l'intersection de la sphère S et du cône C des vecteurs $\sum_{K \in \mathcal{J}} \lambda_K \bar{K}$, $\lambda_K > 0$.

En effet, $\operatorname{grad} \check{\Phi}(U) = \sum_{K \in \mathcal{J}} \bar{K} A_K e^{KU} \in C$ et la réciproque s'établit comme dans la proposition 4.4.

Si on considère la partie discrète de la frontière, un point U de V a pour voisinage les ensembles de séjour pour le processus dont le pas moyen a la direction de $\operatorname{grad} \check{\Phi}(U)$; une telle direction est définie par un vecteur de C .

6 - DETERMINATION DES ENSEMBLES DE SEJOUR

Il résulte des paragraphes précédents que l'on peut, sans restreindre la généralité, se limiter au cas où G est la somme directe de n groupes cycliques d'ordre infini.

Introduisons la fonction f définie sur R^n par

$$(6.1) \qquad f(\theta) = \sum_{I \in \mathcal{J}} A_K e^{i\, I.\theta}$$

Si on pose $A_K^{(r)} = \pi^r \binom{I+K}{I}$, on a :

$$(6.2) \qquad (f(\theta))^r = \sum_{I \in r\mathcal{J}} A_I^{(r)} e^{iI.\theta}$$

et

$$(6.3) \qquad A_I^{(r)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P e^{-iI.\theta} (f(\theta))^r \, d\theta$$

où P désigne le pavé $(-\pi, +\pi)^n$; d'où

$$(6.4) \qquad \sum_{r=o}^{p} A_I^{(r)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P e^{-iI.\theta} \frac{1-f(\theta)^{p+1}}{1-f(\theta)} \, d\theta$$

PROPOSITION 6.1.- Si n est inférieur ou égal à 2 et si $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K = 0$, tous les états sont récurrents nuls et G est le seul ensemble de séjour; dans les autres cas, tous les états sont transitoires.

Remarquons tout d'abord que $f(\theta) = 1$ entraine $I.\theta = 2k\pi$ quel que soit $I \in \mathcal{J}$. Or $\mathcal{J}$ engendre G donc il existe des entiers α_I tels que $\sum_{I \in \mathcal{J}} \alpha_I I = E_i$ élément de la base de G ; d'où

$$\theta.E_k = \theta_k = \sum_{I \in \mathcal{J}} 2\alpha_I k_I \pi = 2k'\pi$$

et si $\theta \in P$, $\theta_k = 0$ quel que soit k donc $\theta = 0$; on a donc $|f(\theta)| < 1$ pour $\theta \neq 0$ dans P et

$$(6.5) \qquad A_I^{(r)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \longrightarrow \infty \qquad \forall I \in G.$$

D'autre part

$$(6.6) \qquad \psi(\theta) = 1 - f(\theta) = 1 - \sum_I A_I e^{iI.\theta}$$

$$= i\Big(\sum_I IA_I\Big).\theta + \sum_I A_I \frac{(I\theta)^2}{2} - \sum_{k=3}^{\infty} \sum_I A_I \frac{(i.I\theta)^k}{k!}$$

Posons

$$(6.7) \qquad F(\theta) = \sum_{I \in \mathcal{J}} A_I \frac{(I.\theta)^2}{2}$$

$$G(\theta) = \sum_{k=3}^{\infty} \sum_I A_I \frac{(iI.\theta)^k}{k!}$$

$F(\theta)$ est alors une forme quadratique définie positive non dégénérée, car nous avons vu que $I.\theta = 0$ quel que soit $I \in \mathcal{J}$, entraine $\theta = 0$, il existe donc deux [illegible] constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que

$$(6.8) \qquad k_1 |\theta|^2 \leq F(\theta) \leq k_2 |\theta|^2$$

Si n est supérieur ou égal à 3 il résulte de (6.8) que

$$\int_P \frac{d\theta}{|1 - f(\theta)|} < \infty$$

et par conséquent, en faisant tendre p vers l'infini dans (6.4) que $\sum_{r=0}^{\infty} A_I^{(r)} = K(I)$ converge quel que soit I . Il en résulte que tous les états sont transitoires.

Il en est de même quel que soit n si $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K \neq 0$, car alors si on appelle J(r) l'état à l'instant r , il résulte de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{J(r)}{r} - \sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K$$

converge presque certainement vers zéro, quand $r \longrightarrow +\infty$. L'égalité $J(r) = 0$ ne peut donc être réalisée avec une probabilité 1 que pour un nombre fini de r . Tous les états sont donc transitoires.

Si $n \leqslant 2$ et si $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K = 0$, nous utiliserons le

LEMME - Il existe une constante K_1 telle que pour $\theta \in P$

$$(6.9) \qquad \left| \mathrm{Re}\,[f(\theta)^r - (1 - F(\theta))^r] \right| \leqslant K_1 r |\theta|^4$$

On a en effet :

$$f(\theta)^r - (1 - F(\theta))^r = G(\theta) \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k}$$

et

$$\mathrm{Re}(f(\theta))^r - (1 - F(\theta))^r) = \mathrm{Re}\, G(\theta) . \mathrm{Re} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1-F(\theta))^{r-1-k}$$

$$-\mathrm{Im}\, G(\theta) . \mathrm{Im} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1-F(\theta))^{r-1-k}$$

(6.9) résulte alors des majorations

$$\left| \mathrm{Re}\, G(\theta) \right| \leqslant K_2 |\theta|^4$$

$$\left| \mathrm{Re} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k} \right| \leqslant K_3 r$$

$$|\mathrm{Im}\ G(\theta)| \leq K_4\ |\theta|^3$$

$$\left|\mathrm{Im} \sum_{0}^{r-1} f(\theta)^k\ (1 - F(\theta))^{r-1-k}\right| = \left|\sum_{1}^{r-1} (1-F(\theta))^{r-1-k}\ \mathrm{Im}\ f(\theta)^k\right|$$

$$\leq K_5\ |\theta|^3 r$$

où K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 sont des constantes.

D'autre part, étant donné $0 < \rho < \pi$, il existe $K_6 > 0$ tel que $\rho_1 \leq |\theta| \leq \rho$ entraine $|f(\theta)| \leq 1 - K_6\ \rho_1^2$ (6.10) ;

Si on appelle S_ρ la boule de centre 0 et de rayon ρ :

$$\int_{P-S_\rho} \frac{1 - f(\theta)^{p+1}}{1 - f(\theta)}\ d\theta \longrightarrow \int_{P-S_\rho} \frac{d\theta}{1-f(\theta)}$$ quand

p tend vers l'infini et par conséquent

$$\mathrm{Re} \int_{P-S_\rho} (f(\theta))^r\ d\theta$$

est le terme général d'une série convergente.

Soit $\frac{2}{5} < a < \frac{1}{2}$ on peut écrire si $r^{-a} \leq \rho$

$$\mathrm{Re} \int_{P} (f(\theta))^r\ d\theta = \mathrm{Re} \int_{P-S_\rho} (f(\theta))^r\ d\theta + \mathrm{Re} \int_{S_\rho - S_{r^{-a}}} (f(\theta))^r\ d\theta$$

$$+ \mathrm{Re} \int_{S_{r^{-a}}} f(\theta)^r\ d\theta$$

Le deuxième terme est majoré en vertu de (6.10) par

$$\int_{S_\rho - S_{r^{-a}}} |f(\theta)|^r \, d\theta \leqslant K_7(1 - K_6 r^{-2a})^r \sim K_7 e^{-K_6 r^{1-2a}}$$

terme général d'une série convergente car $a < \frac{1}{2}$

Il résulte de (6.9) que

$$\left| \mathrm{Re} \int_{S_{r^{-a}}} [f(\theta)^r - (1-F(\theta))^r] d\theta \right| \leqslant K_1' r^{1-5a} \quad \text{si } n = 1$$
$$\leqslant K_1 r^{1-6a} \quad \text{si } n = 2$$

terme général d'une série convergente car a est supérieur à $\frac{2}{5}$

Finalement $\mathrm{Re} \int_P f(\theta)^r \, d\theta$ diffère par le terme général d'une série convergente de

$$\int_{S_{r^{-a}}} (1-F(\theta))^r \, d\theta \geqslant \int_{S_{r^{-a}}} (1 - k_1 |\theta|^2)^r \, d\theta \quad ;$$

si $n = 1$ cette intégrale est minorée par $2 I_r \times r^a$, si $n = 2$, elle est égale à $2\pi I_r$ où

$$I_r = \int_0^{r^{-a}} (1 - k_1 \rho^2)^r \rho \, d\rho = \frac{1 - (1-k_1 r^{-2a})^{r+1}}{2k_1(r+1)}$$

$(1 - k_1 r^{-2a})^{r+1}$ tend vers zéro et $\int_{S_{r^{-a}}} (1 - F(\theta))^r \, d\theta$ est le terme général d'une série divergente. On en déduit que $\sum A_o^{(r)}$ diverge. Il en résulte que tous les états sont récurrents nuls en vertu de (6.5) , donc que G est le seul ensemble de séjour.

Nous allons maintenant étudier les ensembles de séjour dans le cas où $\sum_K K A_K = 0$ $n \geqslant 3$. Pour cela, introduisons un isomorphisme B de

R^n sur lui-même tel que :

$$F(\theta) = F(B\varphi) = |\varphi|^2$$

et soit B° son transposé ; on a la

PROPOSITION 6.2

Si $K(I) = \sum_0^\infty A_I^{(r)}$

$$(6.11) \qquad \lim_{|B^\circ I| \longrightarrow \infty} |B^\circ I|^{n-2} K(I) = \frac{\pi^{-n/2}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |\det B|$$

On a d'après (6.4)

$$(6.12) \qquad |B^\circ I|^{n-2} K(I) = \frac{|B^\circ I|^{n-2}}{(2\pi)^n} \int_P \frac{e^{-iI.\theta}}{\psi(\theta)} d\theta$$

$$= \frac{|B^\circ I|^{n-2}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}P} \frac{e^{-iB^\circ I.\varphi} |\det B| \, d\varphi}{\psi(B\varphi)}$$

où $$\frac{1}{\psi(B\varphi)} = \frac{1}{F(B\varphi) - G(B\psi)} = \frac{1}{|\varphi|^2 - H(\varphi)}$$

$$(6.13) \qquad H(\varphi) = \sum_I \sum_3^\infty A_I \frac{(iB^\circ I.\varphi)^k}{k!}$$

$$= \sum_I A_I \left(e^{iB^\circ I.\varphi} - 1 - |\varphi|^2\right)$$

D'où

$$|H(\varphi)|^2 = \Big| \sum_I A_I \left[(\cos B^\circ I.\varphi - 1) + \frac{(B^\circ I.\varphi)^2}{2} \right]$$

$$+ i \sum_I A_I (\sin B^\circ I.\varphi - B^\circ I.\varphi) \Big|^2$$

$$\leq \Big(\sum_I A_I \frac{(B^\circ I.\varphi)^4}{4!} \Big)^2 + \Big(\sum_I A_I \frac{(B^\circ I.\varphi)^3}{3!} \Big)^2$$

D'où

$$(6.14) \quad |H(\varphi)| \leq M |\varphi|^3$$

et

$$(6.15) \quad \frac{1}{|\varphi|^2 - H(\varphi)} = \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_0^\infty \Big(\frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \Big)^n$$

$$= \frac{1}{|\varphi|^2} + \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_1^\infty \Big(\frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \Big)^n \quad \text{pour } |\varphi| \leq \varepsilon < \frac{1}{M}$$

$L(\varphi) = \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_1^{+\infty} \Big(\frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \Big)^n$ est majorée par $\frac{K^\circ}{|\varphi|}$ pour $|\varphi| \leq \varepsilon$, $\varphi \neq 0$ et toutes ses dérivées d'ordre k admettent une majoration de la forme $\frac{K_k}{|\varphi|^k}$ pour $|\varphi| \leq \varepsilon$, $\varphi \neq 0$; en particulier les dérivées d'ordre $n-2$ sont sommables dans la boule de rayon ε donc dans $B^{-1}P$ (où $L(\varphi)$ est définie par

$$L(\varphi) = \frac{1}{\psi(B\varphi)} - \frac{1}{|\varphi|^2} \Big) .$$

D'autre part

$$\frac{\partial\, e^{iB^\circ I.\varphi}}{\partial \varphi_k} = -i(B^\circ I)_k\, e^{-iB^\circ I.\varphi}$$

d'où

$$\text{grad } e^{-iB^\circ I.\varphi} = -i(B^\circ I)\, e^{-iB^\circ I.\varphi}$$

et

$$(6.16) \quad \Delta\, e^{-iB^\circ I.\varphi} = -|B^\circ I|^2\, e^{-iB^\circ I.\varphi}$$

Distinguons alors deux cas :

1) n est pair

$$(6.17)\qquad |B^{\circ}I|^{n-2}\,K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n}\int_{B^{-1}P}\frac{\Delta^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-iB^{\circ}I.\varphi}\,d\varphi}{\psi(B\varphi)}$$

$$(6.18)\qquad = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n}\int_{B^{-1}P}\Delta^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{1}{\psi(B\varphi)}\right)\Delta e^{-iB^{\circ}I.\varphi}\,d\varphi$$

en appliquant la formule de Green, les intégrales sur le pourtour de $B^{-1}P$ étant nulles puisque $e^{-iB^{\circ}I.\varphi}$ et $\frac{1}{\psi(B\varphi)}$ sont périodiques.

Or $\Delta^{\frac{n-4}{2}}\ \frac{1}{|\varphi|^2} = (-2)\,(-4)\,(-6)\ \ldots\ (-n+4)\,(n-4)(n-6)\ldots(2)\frac{1}{|\varphi|^{n-2}}$

et d'après (6.15)

$$(6.19)\qquad \Delta^{\frac{n-4}{2}}\ \frac{1}{\psi(B\varphi)} = \Delta^{\frac{n-4}{2}}\ \frac{1}{|\varphi|^2} + \Delta^{\frac{n-4}{2}}\,L(\varphi)$$

Appliquons encore une fois la formule de Green

$$(6.20)\qquad \int_{B^{-1}P}\Delta\, e^{-iB^{\circ}I\varphi}\ \Delta^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{1}{\psi(B\varphi)}\right)d\varphi =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int_{B^{-1}P-S_\eta}\Delta\, e^{-i\,B^{\circ}I\varphi}\Delta^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{1}{\psi(B\varphi)}\right)d\varphi$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int_{B^{-1}P-S_\eta} e^{-iB^{\circ}I\varphi}\Delta^{\frac{n-2}{2}}\ \frac{1}{\psi(B\varphi)}\,d\varphi + \ldots.$$

$$+ \int_{[B^{-1}P-S_\eta]} e^{-iB^{\circ}I.\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\Delta^{\frac{n-4}{2}}\ \frac{1}{\psi(B\varphi)}\right] - \frac{\partial}{\partial\nu}\, e^{-iB_{\circ}I\varphi}\Delta^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{\psi B\varphi}\right)d\varphi$$

où S_η désigne la sphère de centre 0 et de rayon η choisi de sorte que S_η soit contenue dans $B^{-1}P$, $[B^{-1}P\text{-}S_\eta]$ désigne la frontière de $B^{-1}P\text{-}S_\eta$, σ son élément d'aire, ν la normale intérieure.

L'intégrale sur $[B^{-1}P]$ est nulle et il reste comme deuxième terme l'intégrale de surface étendue à $[S_\eta]$ où ν désigne la normale extérieure à $[S_\eta]$.

Or $\dfrac{\partial}{\partial \nu} e^{-iB^{\circ}I.\varphi}$ est bornée sur S_η et

$$\Delta^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\psi^{\nu}(B\varphi)} = O(\eta^{-(n-2)})$$

$d\sigma = \eta^{n-1} ds_n$ où ds_n est l'élément d'aire de la sphère de rayon 1 , donc :

$$(6.21) \qquad \int_{[S_\eta]} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-iB^{\circ}I.\varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\sigma \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \longrightarrow 0$$

Par ailleurs $$\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = -(n-2) \frac{1}{|\varphi|^{n-1}} + O(|\varphi|^{-n-1})$$

et $$e^{-iB^{\circ}I.\varphi} = 1 + O(|\varphi|) \qquad |\varphi| \longrightarrow 0$$

D'où

$$(6.22) \qquad \int_{[S_\eta]} e^{-iB^{\circ}I.\varphi} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\sigma \longrightarrow -(n-2) s_n$$

Finalement

$$|B^{\circ}I|^{n-2} K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}P} e^{-iB^{\circ}I.\varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi$$

$$+ \frac{|\det B|}{4(\pi)^{n/2}} \left(\frac{n-4}{2}\right)!$$

où $\Delta^{\frac{n-2}{2}} \dfrac{1}{\psi(B\varphi)}$ est sommable dans $B^{-1}P$ car $\Delta^{\frac{n-2}{2}} \dfrac{1}{|\varphi|^2} = 0$

et $\Delta^{\frac{n-2}{2}}$ $L(\varphi)$ est sommable. En appliquant le théorème de Riemann Lebesgue

$$\lim_{|B^{o}I| \to \infty} \int_{B^{-1}P} e^{-iB^{o}I\varphi}\, \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)}\, d\varphi = 0$$

D'où

$$\lim_{|B^{o}I| \to \infty} |B^{o}I|^{n-2} K(I) = \frac{\pi^{-n/2}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |\det B|$$

2) n est impair

$$(6.25) \quad |B^{o}I|^{n-2} K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}} |\det B|}{(2\pi)^{n}} |B^{o}I| \int_{B^{-1}P} \frac{\Delta^{\frac{n-3}{2}} e^{-iB^{o}I\varphi}}{\psi(B\varphi)}\, a\varphi$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}} |\det B|}{(2\pi)^{n}} |B^{o}I| \int_{B^{-1}P} e^{-iB^{o}I\varphi}\, \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)}\, d\varphi$$

Soit Ω_{ε} le domaine obtenu en retirant de $B^{-1}P$ un cylindre de révolution de centre 0 d'axe parallèle à $B^{o}I$, de rayon ε, de hauteur 2ε, Σ_{ε} la frontière de Ω_{ε}, ν la normale intérieure. En appliquant la formule d'Ostrogradski, on obtient :

$$|B^{o}I|^{n-2} \frac{K(I)}{|\det B|} = -\lim_{\varepsilon \to o} \int_{\Sigma_{\varepsilon}} \frac{iB^{o}I.\nu}{|B^{o}I|}\, e^{-iB^{o}I.\varphi}\, \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)}\, ds$$

$$+ i \int_{\Omega_{\varepsilon}} e^{-iB^{o}I.\varphi} \frac{B^{o}I}{|B^{o}I|} . \operatorname{Grad} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)}\, d\varphi$$

L'intégrale de surface se réduit à l'intégrale sur les deux bases du cylindre dont l'aire est $0(\varepsilon^{n-1})$ tandis que

$$\Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = o(\varepsilon^{-(n-1)})$$

donc elle tend vers zéro quand ε tend vers zéro.

D'autre part

$$\Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = (-2)(-4)\ldots(-n+3)(n-4)(n-6)\ldots 3.1 \frac{1}{|\varphi|^{n-1}} + R(\varphi)$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-3)!}{|\varphi|^{n-1}} + R(\varphi)$$

et grad $\Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = -(-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-3)!\,(n-1)}{|\varphi|^{n+1}} \varphi + R_1(\varphi)$

où $B^{\circ}I \,.\, R_1(\varphi)$ est sommable dans $B^{-1}P$ et

$$\int_{\Omega_\varepsilon} e^{-iB^{\circ}I.\varphi} \frac{B^{\circ}I.\varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi = -i \int_{\Omega_\varepsilon} \sin(B^{\circ}I.\varphi) \frac{B^{\circ}I.\varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi$$

puisque Ω_ε est symétrique par rapport à 0 . Cette expression tend vers

$$-i \int_{B^{-1}P} \sin(B^{\circ}I.\varphi) \frac{B^{\circ}I.\varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi \qquad \text{(quand } \varepsilon \text{ tend vers 0)}$$

En faisant tendre $|B^{\circ}I|$ vers l'infini, on déduit du théorème de Lebesgue que

(6.26)

$$\lim_{|B^{\circ}I| \to \infty} |B^{\circ}I|^{n-2} K(I) =$$

$$= \lim_{|B^{\circ}I| \to \infty} \frac{(n-3)!(n-1)}{(2\pi i)^n} |\det B| \int_{\Omega} \frac{\sin(B^{\circ}I.\varphi)}{|B^{\circ}I|} \frac{B^{\circ}I.\varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi$$

où Ω est un domaine borné quelconque entourant 0 . On peut choisir pour Ω un cylindre de centre 0, d'axe parallèle à $B^{\circ}I$, de rayon R , de hauteur 2a . On a alors :

$$\int_{\Omega} \sin (B^{\circ}I.\varphi) \frac{(B^{\circ}I.\varphi)}{|B_{o}I|\,|\varphi|^{n+1}}\, d\varphi = \int_{-a}^{+a} x \sin kx\, dx \int_{o}^{R} \frac{r^{n-2}\, dr}{(x^2+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, s_{n-1}$$

avec $k = |B^{\circ}I|$

$$= 2s_{n-1} \int_{o}^{+ka} \sin u \frac{du}{u} \int_{o}^{Rk/u} \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n+1/2}}\, dr$$

Si on pose

$$F(k/u) = \int_{o}^{Rk/u} \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n+1/2}}\, dr$$

et $\Phi(u) = 1/u(F(k/u) - F(\infty))$

on a :

$$\int_{o}^{+ka} \sin u\, F(k/u)\, du/u = F(\infty) \int_{o}^{+ka} \sin u\, du/u + \int_{o}^{+ka} \sin u\, \Phi(u)\, du$$

Or $\Phi'(u) = -1/u^2\,(F(k/u) - F(\infty)) - k/u^3\, F'(k/u)$

D'où $$-\frac{1}{R^2k^2} \leq \Phi'(u) \leq \frac{1}{2k^2R^2}$$

et

$$\left| \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin u\, \Phi(u)\, du \right| = \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin u\, (\Phi(u) - \Phi(u+\pi))\, du \right|$$

$$\leq \frac{\pi^2}{k^2R^2}$$

D'où $$\left| \int_0^{+ka} \sin u \, \Phi(u) \, du \right| \leqslant \frac{ka \, \pi^2}{2\pi k^2 R^2} + \frac{R(\infty)}{ka - \pi} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow +\infty$$

On en déduit :

$$\lim_{|B^\circ I| \to \infty} \int_\Omega \frac{\sin(B^\circ I . \varphi)}{|B^\circ I|} \frac{B^\circ I . \varphi}{|\varphi|^{n+1}} \, d\varphi = s_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u \, \frac{du}{u} \int_0^\infty \frac{r^{n-2} \, dr}{(1+r^2)^{n+1/2}}$$

$$= \frac{\pi^{n+1/2}}{\Gamma(n+1/2)}$$

et

$$(6.27) \qquad \lim_{|B^\circ I| \to \infty} |B^\circ I|^{n-2} K(I) = \frac{|\det B| (n-3)! (n-1) \pi^{n+1/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{|\det B| \pi^{-n+2}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

La proposition 6.2 généralise un résultat obtenu par ITO et Mc KEAN ([8]) dans le cas particulier où J est formé des points $\pm E_i$ et où $A_i = \frac{1}{2^n}$

Définition 6.1 - Etant donné un sous-ensemble fini B de G , on appelle capacité C(B) de B le nombre défini par

$$C(B) = \max \sum_{I \in B} e(I) : e \geqslant 0 , \; e = 0 \text{ hors de } B ,$$

$$\text{tel que} \quad p(I) = \sum_J K(J) \, e(I-J) \leqslant 1 .$$

PROPOSITION 6.3 (Test de Wiener) - Soit Q un sous-ensemble de G , Q_1 le sous-ensemble du complémentaire de Q formé des points tels que $2^l \leqslant |I| < 2^{l+1}$; Q est un ensemble de séjour si et seulement si la série

$$\sum_{l \geqslant 1} 2^{-l(s-2)} \, C(Q_l)$$

converge.

La démonstration utilise uniquement le fait qui résulte de la proposition 6.2. , qu'il existe deux constantes k et $k' > 0$ telles que

$$k\,|I|^{(2-n)} \leq K(I) \leq k'\,|I|^{(2-n)} \quad \text{(cf.[8])}.$$

En appliquant la proposition (6.3) et en estimant $C(Q_1)$ à l'aide de la capacité pour un potentiel newtonien de l'ensemble qui lui correspond dans R^n , on obtient la

PROPOSITION 6.4 - Si $n \geq 4$ et si Q est le domaine de révolution défini par

$$(I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_{n-1}^2) \geq f^2(I_n) \quad \text{et} \quad I_n \leq 1$$

Q est de séjour si et seulement si la série :

$$\sum (2^{-n} f(2^n))^{n-3}$$

converge.

Ensembles de séjour quand $\sum_{K \in \mathbb{Z}} A_K K = m \neq 0$.

L'état $J(r)$ à l'instant r du processus d'état initial 0 est la somme de r variables aléatoires indépendantes bornées et de même loi. Pour préciser les ensembles de séjour, nous allons utiliser la loi du logarithme itéré (cf. par exemple ([10]) p. 254-263) (On pourrait utiliser une variante plus élaborée (cf. ([4]) . Rappelons l'énoncé que nous utiliserons ici :

Les Z_i étant des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi , de moyenne nulle, d'écart type σ :

$$(6.28) \qquad P\left(\limsup \frac{\sum_1^r Z_i}{\sigma \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} = 1 \right)$$

$$= P\left(\limsup \frac{\left|\sum_1^r Z_i\right|}{\sigma \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} = 1 \right) = 1$$

Soit maintenant des variables aléatoires V_i à valeur dans R^n , indépendantes de même loi , de moyenne nulle, telles que

$$E(U.\,V_i)^2 = \Phi(U) = U.AU$$

soit une forme quadratique définie positive non dégénérée. On peut appliquer la loi du logarithme itéré aux variables réelles $Z_i = U.V_i$: (6.28) s'écrit alors

$$(6.29) \qquad P\left(\limsup \frac{U.\sum_1^r V_i}{\sqrt{2\,\Phi(U)\, r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}} = 1\right) = 1$$

Autrement dit, quel que soit U fixé, on a presque certainement

$$\frac{U.\sum_1^r V_i}{\sqrt{\Phi(U)}} \leq (1+d)\sqrt{2r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de r si $d > 0$, pour un nombre infini si $d < 0$.

Soit E_k l'ellipsoïde défini par $Y \cdot A^{-1} Y \leq k^2$

$U.Y = k\sqrt{\Phi(U)}$ est l'équation du plan tangent au point $Y_o = \frac{k\,AU}{\sqrt{\Phi(U)}}$ du bord de E_k.

Prenons alors $p \geq n$ vecteurs $U_1, U_2, \ldots, U_p$ engendrant R^n ; les p inégalités

$$U_i\, Y \leq (1+d)\sqrt{\Phi(U)}$$

définissent un polyèdre $\Pi(d,p)$ circonscrit à E_{1+d} ; et presque certainement :

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}} \in \Pi(d,p) \quad .$$

sauf pour un nombre fini (resp. infini) de valeurs de r si $d > o$ (resp. $d < o$)

De $\Pi(d,p) \supset E_{1+d}$ si $d < o$, et de $\Pi(d',p) \subset E_{1+d}$ si $o < d' < d$ pour p assez grand et des U_i convenables, on déduit que presque certainement

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \operatorname{Log}\operatorname{Log} r}} \in E_{1+d}$$

sauf pour un nombre fini(resp. infini) de valeurs de r si $d > o$ (resp. $d < o$) . Il en résulte aussi que si $d_1 > o$ et $d_2 < o$

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \text{ Log Log } r}}$$

appartient pour une infinité de valeurs de r , à la région $C(d_1, d_2, U)$ définie par :

$$\begin{cases} U.Y \geq (1 + d_2)\ \Phi(U) \\ Y \in E_{1+d_1} \end{cases}$$

PROPOSITION 6.5 - Si on note $F_r(1+d)$ le sous-ensemble des points X de R^n , tels que

$$\frac{X - rm}{\sqrt{2r \text{ Log Log } r}} \in E_{1+d} \quad ;$$

quel que soit k

$\bigcup_{r=k}^{\infty} F_r(1 + d)$ est de séjour si $d > o$; il n'est pas de séjour si $d < o$.

Si $d > o$, $X_r \in F_r(1+d)$ presque certainement sauf pour un nombre fini de r , donc

$$\bigcup_{r=k}^{\infty} F_r(1 + d)$$

est de séjour.

Si $d < o$, choisissons $d < d' < o$, U tel que $U.m = 0$ et considérons le sous-ensemble $C_r(-d, d', U)$ défini par

$$X \in C_r(-d, d', U) \Longleftrightarrow \frac{X - rm}{\sqrt{2r \text{ Log Log } r}} \in C(-d, d', U)$$

Il existe une constante K telle que pour $|p| \geq K \sqrt{2r \text{ Log Log } r}$ $F_r(1-d)$ et $F_{r+p}(1+d)$ soient sans point commun.
Par ailleurs :

$$\frac{U.(X - rm)}{\sqrt{2r \text{ Log Log } r}} = \frac{U \cdot X}{\sqrt{2r \text{ Log Log } r}} \geq \sqrt{\bar{\Phi}(U)}\ (1 + d')$$

entraine

$$\frac{U.X}{\sqrt{2(r+p)\text{Log Log } (r+p)}} \geq \sqrt{\bar{\Phi}(U)}\ (1+d) \quad \forall\ |p| \leq K\sqrt{2r \text{ Log Log } r}$$

pour r assez grand.

Il en résulte que $C_r(-d, d', U)$ est, pour r assez grand, extérieur à $\bigcup_1^\infty F_r(1 + d)$.

Or, presque certainement $X_r \in \bigcup_1^\infty C_r$ pour une infinité de r donc $\bigcup_1^\infty F_r(1 + d)$ n'est pas de séjour

---

7 - TEMPS DE SEJOUR ET TEMPS D'ATTEINTE

$X_r(J)$ étant l'état à l'instant r du processus d'état initial $X_o(J) = J$ et E un sous-ensemble de G , on peut associer à E et au processus deux variables aléatoires à valeurs entières positives (éventuellement $+\infty$)

$$(7.1) \qquad T(J, E) = \sum_{r=o}^{\infty} Y_r(J, E)$$

où

$$(7.2) \qquad Y_r(J, E) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_r(J) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$T(J, E)$ sera appelé temps passé dans E ou encore temps de séjour total dans E . (on peut, en effet, étudier aussi la durée d'un séjour dans E entre deux séjours hors de E) .

$$(7.3) \qquad N(J,E) = \text{Inf}\left\{ r : X_r(J) \in E \right\}$$

sera appelé temps d'atteinte de E à partir de J. ($N(J, E) = 0$ si $J \in E$, $N = +\infty$ si $X_r(J) \notin E \quad \forall r$) ; cette dernière variable a été étudiée dans de nombreux cas particuliers (cf. par exemple ([6]) et ([7]).

Considérons tout d'abord

$$T(I) = T(J, \{J + I\}) \tag{7.4}$$

qui ne dépend pas de J en raison de l'homogénéité de la chaine ; la loi de $T(I)$ est donnée par la

PROPOSITION 7.1 - Si I est récurrent ($n \leqslant 2$, $\sum K A_K = 0$)

$$P(T(I) = \infty) = 1 \quad ; \tag{7.5}$$

Si I est transitoire

$$P\{T(I) = r\} = \begin{cases} \dfrac{K(I)}{(K(0))^2}\left(1 - \dfrac{1}{K(0)}\right)^{r-1} & r \geqslant 1 \\ 1 - \dfrac{K(I)}{K(0)} & r = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

où

$$K(I) = \sum_0^\infty A_I^{(r)}$$

Si I est récurrent on a (cf. [10] p. 31)

$$Pr(T(I) = \infty) = Pr(T(I) > o) = \lim_{p \to \infty} \frac{\sum_{r=o}^{p} A_I^{(r)}}{\sum_{r=o}^{p} A_o^{(r)}}$$

Distinguons alors les deux cas : $n = 2$ et $n = 1$.

a) si $n = 2$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\sum_{r=o}^{p} A_I^{(r)}}{\sum_{r=o}^{p} A_o^{(r)}} = \lim_{p\to\infty} \frac{\int_P e^{-iI.\Theta} \dfrac{1 - f(\Theta)^{p+1}}{1 - f(\Theta)}\, d\Theta}{\int_P \dfrac{1 - f(\Theta)^{p+1}}{1 - f(\Theta)}\, d\Theta} \tag{7.7}$$

L'intégrale du dénominateur tend vers $+\infty$, quand p tend vers $+\infty$. D'autre part $\dfrac{e^{-iI.\theta}-1}{1-f(\theta)}$ est sommable sur P car $\dfrac{e^{-iI.\theta}-1}{1-f(\theta)} = O(|\theta|^{-1})$ $\theta \to 0$

et $\left|1 - f(\theta)^{p+1}\right| \leq 2$. Donc

$\int_P (e^{-iI.\theta} - 1) \dfrac{1-f(\theta)^{p+1}}{1 - f(\theta)}\, d\theta$ converge quand p tend vers $+\infty$ vers la limite finie $\int_P \dfrac{e^{-iI.\theta}-1}{1-f(\theta)}\, d\theta$ et la limite de (7.7) est 1 .

b) Si $n = 1$, on a :

$$A_o^{(r)} = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(\theta))^r \, d\theta = 2 \int_o^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r\varphi(\theta)\, d\theta$$

où l'on a posé :

$$f(\theta) = \rho(\theta)\, e^{i\varphi(\theta)} \quad \text{et où}$$

$$\rho(\theta) = 1 + O(\theta)^2 \quad , \quad \varphi(\theta) = O(\theta)^3 \qquad \theta \to 0$$

on en déduit

$$A_o^{(r)} = 2 \int_o^{\lambda r^{-1/3}} (\rho(\theta))^r \cos r\, \varphi(\theta)\, d\theta + 2 \int_{\lambda r^{-1/3}}^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r\varphi(\theta) d\theta$$

où l'on peut choisir λ et r assez grand pour que

$$0 \leq \theta \leq \lambda r^{-1/3} \quad \text{implique} \quad \cos r\,\varphi(\theta) \geq \alpha > 0 \quad \text{et}$$

$$\rho(\theta) \geq 1 - \beta\theta^2 \geq 0 \, , \quad \beta > 0 \, .$$

Alors

$$\int_o^{\lambda r^{-1/3}} [\rho(\theta)]^r \cos r\,\varphi(\theta)\, d\theta \geq \alpha \int_o^{\lambda r^{-1/3}} (1 - \beta\theta^2)^r \, d\theta$$

$$\geq \frac{\alpha r^{1/3}}{2\lambda\beta} \int_o^{\lambda r^{-1/3}} (1 - \beta\theta^2)^r \, 2\beta\theta \, d\theta \geq \frac{r^{1/3}\alpha(1-(1-\beta\lambda^2 r^{-2/3})^{r+1})}{2\lambda\beta(r+1)}$$

Par ailleurs, il existe $\beta' > 0$ tel que $\rho(\theta) \leq 1 - \beta'\theta^2$ quel que soit $\theta : 0 \leq \theta \leq \pi$. D'où :

$$\left| \int_{\lambda r^{-1/3}}^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r\,\varphi(\theta)\, d\theta \right| \leq \pi(1 - \beta' \lambda^2 r^{-2/3})^{r+1}$$

d'où

$$|A_o^{(r)}| \geq \frac{\alpha r^{1/3}}{\lambda\beta(r+1)} - \frac{\alpha r^{1/3}(1-\beta\lambda^2 r^{-2/3})^{r+1}}{\lambda\beta(r+1)} - 2\pi(1\,\beta'\lambda^2 r^{-2/3})^{r+1}$$

$$\geq k\, r^{-2/3} \quad \text{pour } r \text{ assez grand.}$$

Par ailleurs

$$\left| A_k^{(r)} - A_o^{(r)} \right| \leq 2 \int_o^{\pi} \left| e^{ik\theta} - 1 \right| |f(\theta)|^r\, d\theta$$

$$\leq 4 \int_o^{\pi} k\theta\, |f(\theta)|^r\, d\theta \leq 2k \int_o^{\pi} \theta(1 - \beta' \theta^2)^r d\theta$$

$$\leq \frac{k(1 - (1 - \beta' \pi^2)^{r+1})}{\beta' \quad r+1}$$

Donc $\dfrac{A_k^{(r)} - A_o^{(r)}}{A_o^{(r)}}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini; il résulte alors de $A_o^{(r)} \longrightarrow \infty$ et $A_o^{(r)} \geq 0$ que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_o^n A_k^{(r)}}{\sum_o^n A_o^{(r)}} = 1 .$$

Si I est transitoire, on a

$$(7.8) \qquad \Pr(T(I) = r) = \Pr(T(I) > 0)\, [\Pr T(I) = r / T(I) > 0\,]$$

Or $\Pr[T(I) = r / T(I) > 0] = \Pr[T(0) = r]$ en vertu de l'homogénéité de la chaine.

Posons $P[T(0) = 1] = p$. Les différents retours en 0 étant indépendants et la probabilité de l'un d'eux étant $1 - p$, on a :

$$(7.9) \qquad P(T(0) = r) = p(1-p)^{r-1} \qquad (r \geq 0)$$

D'autre part

$$(7.10) \qquad E(T(I)) = \sum_0^\infty E(Y_r(0, \{I\})) = \sum_0^\infty A_I^{(r)} = K(I)$$

où en vertu de (7.8)

$$K(I) = P[T(I) > 0]\ K(0)$$

et en vertu de (7.9)

$$K(0) = \sum_0^\infty rp(1-p)^{r-1} = 1/p$$

D'où

$$P(T(I) = r) = \frac{K(I)}{K(0)} \frac{1}{K(0)} \left(1 - \frac{1}{K(0)}\right)^{r-1} \qquad r > 0$$

$$P[T(I) = 0] = 1 - \frac{K(I)}{K(0)}$$

Pour les grandes valeurs de $|I|$, on pourra remplacer $K(I)$ par l'estimation fournie par (6.11).

On déduit de (7.10) que

$$(7.11) \qquad E(T(J,E)) = \sum_{I \in E} E\, T(J,I) = \sum_{I \in E} K(I - J)$$

ETUDE DE $N(J, E)$

On a

$$(7.12) \qquad \begin{aligned} P[N(J,E) = 0] &= 1 \quad \text{si } J \in E \\ P[N(J,E) = r] &= 1 - \sum_{K \in \complement E} \Pi^r_{\complement E}(J,K) \quad \text{si } J \in \complement E . \end{aligned}$$

où $\Pi_{\complement E}$ désigne la restriction de la matrice Π à $\complement E$.
(7.12) est équivalent à

$$(7.13) \qquad \begin{aligned} P[N(J,E) = 0] &= 1 \qquad J \in E \\ P[N(J,E) = r+1] &= \sum_K A_K\, P[N(J+K,E) = r] \qquad J \in \complement E ,\ r \geq 0. \end{aligned}$$

Si on introduit la fonction génératrice de $N(J, E)$:

$$g(s, J, E) = E(s^{N(J,E)})$$

définie pour $0 \leq s \leq 1$ avec la convention $1^{\infty} = 1$ si $N(J, E)$ peut prendre la valeur $+\infty$.
(7.13) est équivalent à:

$$(7.14) \quad \begin{cases} g(s, J, E) = 1 & J \in E \\ g(s, J, E) = s \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K \, g(s, J+K, E) & J \in \complement E . \end{cases}$$

(7.14) est analogue aux équations aux différences finies qui s'introduisent dans la résolution approchée d'un problème de Dirichlet.

Si, en particulier, on veut calculer le temps moyen d'atteinte

$$\bar{N}(J, E) = \left. \frac{\partial g(s,J,E)}{\partial s} \right|_{s=1}$$

on voit que, s'il est défini, il satisfait

$$(7.15) \quad \begin{cases} \bar{N}(J, E) = 0 & J \in E \\ \bar{N}(J, E) = 1 + \sum_K A_K \bar{N}(J+K, E) & J \in \complement E \end{cases}$$

que l'on peut aussi déduire directement de (7.13)

On peut poursuivre les calculs dans le cas où $\complement E$ est fini. Posons $\complement E = F$ et appelons $\bar{F}$ l'ensemble des points que l'on peut atteindre en un pas à partir de F, c'est-à-dire que $\bar{F} = F + \mathcal{J}$. Le temps d'atteinte de $\bar{F} - F$ à partir d'un point de F est égal au temps d'atteinte de $\complement F$ et satisfait

$$(7.16) \quad \begin{cases} P[N(J, \bar{F} - F) = 0] = 1 & J \in \bar{F} - F \\ P[N(J, \bar{F} - F) = r] = 1 - \sum_{K \in F} \pi_F^r (I,J) & J \in F \end{cases}$$

qui est un système fini d'équations puisque $\bar{F}$ comme F est fini.
Il en est de même des deux systèmes analogues à (7.14) et (7.15) que l'on en déduit.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

1] BOURBAKI, N. - "Intégration" Chapitre II - Hermann Paris 1952

2] CHOQUET, G. - "Theory of capacities" - chapitre VII - Annales de l'Institut Fourier, Tome V -(1953-54) pp. 132-294.

3] CHOQUET, G. - "Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cones convexes" Séminaire Bourbaki, 9ème année, n° 139 - Décembre 1956 PARIS.

4] FELLER, W. - "The general form of the so-called law of the iterated logarithm" - Trans. Am. Math. Soc. 54 (1953) - pp. 373-402.

5] FELLER, W. - "An introduction to probability theory and its applications" - Volume I, chapitre XIV, J. Wiley and sons New York - 1957.

6] FELLER, W. - "Boundaries induced by positive matrices" Trans. Am. Math. Soc. Vol.83 (1956) pp. 19-54.

7] FUCHS, A. - "Un problème de temps d'atteinte" - Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris , Vol. VII (1958) - Fasc. 4, pp. 161-166.

8] ITO, K. et Mc KEAN,H.P.Jr - " Potentials and the random walk" - Illinois Journal of Mathematics - Vol. 4,n° 1, Mars 1960 -pp. 119-132.

9] JACOBSON, N. - "Lecture in abstract algebra" - Tome 2 - chap. III, parag. 9 - Van Nostrand , New York - 1951.

10] LOEVE, M. - "Probability theory" - 2ème édition - Van Nostrand New York - 1960.

11] NEVEU, J. - "Lattice methods and submarkovian processes" - Proceedings of the 4th Berkeley Symposium (1960) - Vol. II - pp. 347-391.

C H A P I T R E III

ETUDE DE LA FRONTIERE DE FELLER POUR DES CHAINES DE MARKOFF EN CASCADE NON HOMOGENES

Nous nous proposons dans ce chapitre de généraliser quelques résultats du chapitre précédent.

1 - ELEMENTS EXTREMAUX DE C ET DECOMPOSITION DE Π .

Soit C le convexe défini par $\Pi Z = Z$, $Z \geq 0$ $Z_o = 1$, (1.1) Π étant tel que $\Pi_I^J > 0$ si et seulement si $J-I \in \mathcal{J}$ fini ; C est compact pour la topologie faible car quel que soit J , il existe n tel que $\Pi_o^{nJ} > 0$ et $Z_J \leq \dfrac{Z_o}{\Pi_o^{nJ}}$ (Nous Supposons $\bigcup_{n=0}^{\infty} n\mathcal{J} = G$) . Si Π admet une décomposition de la forme :

$$(1.2) \qquad \Pi = \sum_1^r T_l \ , \quad T_l \geq 0 \ , \quad T_l T_m = T_m T_l \quad \text{quels que soient } m, l$$

on déduit de (1.1) et de (1.2)

$$Z = \Pi Z = \sum_1^r T_l Z$$

et $$\Pi T_l Z = T_l \Pi Z = T_l Z \geq 0$$

Si Z est extrémal de C , on déduit de $Z = \sum_1^r (T_l Z)_o \dfrac{T_l Z}{(T_l Z)_o}$

où $\sum_1^r (T_l Z)_o = Z_o = 1$:

$$Z = \frac{T_l Z}{(T_l Z)_o} \quad \text{quel que soit} \quad l \qquad (1.3)$$

Inversement tout Z positif satisfaisant (1.3) est un élément de C si

$$\sum_1^r (T_l Z)_o = 1 \qquad (1.4)$$

On peut encore écrire (1.3) et (1.4.) sous la forme :

$$(1.5) \qquad T_l Z = \lambda_l Z \ , \quad \sum_1^r \lambda_l = 1, \quad Z_o = 1, \quad \lambda_l > 0 \quad Z \geqslant 0$$

On a donc ramené la recherche de vecteurs propres de Π à celle de vecteurs propres communs aux T_l .

Remarquons que la condition d'homogénéité dans l'espace permet de prendre $\Pi = \sum_{K \in \mathfrak{J}} T_K$ avec $(T_K)_I^{I+J} = \delta_K^J \ \pi_I^{I+J}$; ce qui permet de retrouver les résultats du chapitre précédent. La condition $T_l \geqslant 0$ dans (1.2) limite beaucoup les choix possibles ; nous nous limiterons au cas où T_l est défini à partir d'une partition de $\mathfrak{J} = \sum_1^r \mathfrak{J}_l$ par

$$(T_l)_I^{I+J} = \begin{cases} \pi_I^{I+J} & \text{si } J \in \mathfrak{J}_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle décomposition est utilisée pour des matrices finies dans la méthode des directions alternées de Peaceman-Rachford pour la résolution des équations aux différences rencontrées dans les problèmes alliptiques (cf. par exemple [3]) .

(1.2) s'écrit alors :

$$\sum_{K \in (I+\mathfrak{J}_l) \cap (J-\mathfrak{J}_m)} \pi_I^K \ \pi_K^J = \sum_{K \in (I+\mathfrak{J}_m) \cap (J-\mathfrak{J}_l)} \pi_I^K \ \pi_K^J \qquad (1.6)$$

$\forall$ l, m, I, J.

Montrons que la condition (1.6) impliquée par la condition d'homogénéité est moins restrictive ; considérons par exemple une marche dans le plan avec

$$\mathcal{J} = \{(1,0)\ (0,1)\ (-1,0)\ (0,-1)\}$$

$$\mathcal{J}_1 = \{(1,0)\ (-1,0)\}$$

$$\mathcal{J}_2 = \{(0,1)\ (0,-1)\}$$

$$\pi^{i+1,j}_{i,j} = \alpha_i \geq 0\ ,\quad \pi^{i,j+1}_{i,j} = \beta_j \geq 0\ ,\quad \pi^{i-1,j}_{i,j} = \alpha'_i \geq 0,$$

$$\pi^{i,j-1}_{i,j} = \beta'_j \geq 0 \qquad (1.7)$$

avec $\alpha_i + \alpha'_i = p$, $\beta_i + \beta'_i = q$, $p + q = 1$ satisfont (1.5) bien que ne définissant pas une chaine homogène.

2 - CONSTRUCTION DES ELEMENTS EXTREMAUX DE C

Appelons $S([p,q], \mathcal{E})$ le système des équations

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_1} \pi^{I+J}_{I}\ Z_{I+J} = \lambda_1 Z_I \quad \text{pour} \quad p \leq 1 \leq q \qquad I \in \mathcal{E}\ ,$$

où $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{G}$. Nous nous bornerons au cas où $\bigcup_0^\infty n\mathcal{J} = \mathcal{G}$. Alors (1.5) s'écrit :

$$S([1,r], \mathcal{G}) \qquad (2.1)$$

$$Z_1 \geq 0 \qquad (2.2)$$

$$Z_o = 1 \qquad (2.3)$$

$$\sum_1^r \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_1 > 0 \qquad (2.4)$$

Soit $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ engendré par $\mathcal{J}_1$; si $\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}$ est fini , $S(1, K + \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1})$ s'écrit $P_K Z^* = \lambda_1 Z^*$ où P_K et Z^* sont les restrictions de π et Z à $K + \mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}$; il n'admet donc une solution que

si λ_1 est valeur propre de P_K ; tous les P_K quand K parcourt $\mathcal{G} / \mathcal{G}_1$ doivent donc avoir une valeur propre commune comprise entre 0 et 1 . C'est le cas, en particulier si $\sum_{J \in \mathcal{J}_1} \pi_I^{I+J} = \mu_1$ est indépendant de I ; Z_I est entièrement défini par sa donnée pour $I \in K + \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{G}_1$.

Si $\mathcal{G}_1$ est infini, $S[1 , K + \mathcal{G}_1]$ permet, pour λ_1 donné, de calculer Z_I pour $I \in K + \mathcal{G}_1$ si on le donne pour $I \in K + \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_1$ est un sous-ensemble de $\mathcal{G}_1$ qui dépend de $\mathcal{J}_1$ mais qu'on peut choisir indépendant de K et contenant 0 .

Renumérotons les $\mathcal{G}_1$ de sorte que $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ + \mathcal{G}_s = \mathcal{G}$, s étant le plus petit possible ; on peut alors exprimer une solution Z du système

$$S(1, \mathcal{G}_1 + \mathcal{H}_2 + \ + \mathcal{H}_s)$$

$$S(2, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{H}_3 + \ + \mathcal{H}_s)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S(s, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ + \mathcal{G}_s)$$

comme fonction linéaire des Z_I pour $I \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \ldots + \mathcal{H}_s = \mathcal{L}$ et comme fonction de $\lambda_1 ; \lambda_2 , \ldots , \lambda_s$ ceux-ci pouvant d'ailleurs être astreints à certaines conditions , en particulier si $\mathcal{G}_1$ est fini , les λ_1 doivent être valeurs propres communes des P_1 ; choisissons en outre les λ_1 satisfaisant (2.4) ; Z est alors, en vertu de (1.6) , solution du système $S([1, s], \mathcal{G})$.

En effet, puisque c'est une solution de $S(s, \mathcal{G})$

$$T_s Z = \lambda_s Z \qquad (2.5)$$

donc $$T_s(T_{s-1} Z) = T_{s-1}(T_s Z) = \lambda_s T_{s-1} Z \qquad (2.6)$$

Or puisque Z est solution de $S(s-1, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ldots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s)$

$(T_{s-1} Z)_I = \lambda_{s-1} Z_I$ pour $I \in \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ldots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s$ donc $T_{s-1} Z = \lambda_{s-1} Z$ comme solution de (2.5) entièrement déterminée par sa donnée sur $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ldots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s$.

De proche en proche, on démontre de même que $T_1 Z = \lambda_1 Z$ quel que soit 1 compris entre 1 et s.

Alors Z sera solution de $S([1,r], \mathcal{G})$ si c'est une solution de $S[[s+1, r], \mathcal{H}]$ ce qui impose de nouvelles conditions sur les λ_1 et les Z_I pour $I \in \mathcal{H}$.

En effet, $T_p(T_1 Z) = T_1(T_p Z) = \lambda_p T_1 Z \qquad \forall\, 1 \leq p \leq s < 1 \leq r$

donc $T_1 Z$ est entièrement défini pour λ_1 fixé positif par sa donnée sur $\mathcal{H}$, et comme il coïncide avec $\lambda_1 Z$ sur cet ensemble, on a $T_1 Z = \lambda_1 Z$. Il reste à écrire que Z satisfait (2.2) et (2.3); pour tout choix des λ_1 satisfaisant les conditions imposées, les conditions linéaires déjà écrites que doivent satisfaire les Z_I pour $I \in \mathcal{H}$, jointes à (2.3) et (2.2) définissent un convexe éventuellement vide $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ de $(R^+)^{\mathcal{H}}$ puisque Z est une fonction linéaire des Z_I pour $I \in \mathcal{H}$. Ce convexe est compact comme C. Considérons alors l'ensemble C_o des points de $(R^+)^r \times (R^+)^{\mathcal{H}}$ dont la section par $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ est $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ à tout élément extrémal de C correspond un point de C_o et à tout point de C_o une solution de (1.5). Soit C^* l'ensemble des éléments extrémaux Z^* de C et Z la solution de (1.5) associée à un point de C_o dont les r premières coordonnées sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Il existe une mesure μ sur C^* positive de masse totale 1 telle que $Z = \int_{C^*} Z^* \, d\mu$. De $\dfrac{T_1^n Z}{\lambda_1^n Z} = Z$

on déduit $Z = \int_{C^*} \dfrac{T_1^n Z^*}{\lambda_1^n} \, d\mu$ or $T_1 Z^* = \lambda_1^* Z^*$, d'où

$Z = \int_{C^*} \left(\dfrac{\lambda_1^*}{\lambda_1}\right)^n Z^* \, d\mu$, et en faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\lambda_1^* = \lambda_1$ sur le support de μ ; supposons en outre que la restriction Z_o de Z à $\mathcal{H}$ soit un élément extrémal de $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$

alors on déduit de $Z = \int_{C^*} Z^* \, d\mu$ $\qquad Z_o = \int_{C^*} Z_o^* \, d\mu$ où Z_o^* appartient à $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$; si le support de μ n'était pas réduit à un point de C^*, on aurait :

$$Z_o = \int_{C_1^*} Z_o^* \, d\mu + \int_{C_2^*} Z_o^* \, d\mu \quad ; \text{ et } Z_o \text{ serait le barycentre de}$$

2 points de $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$. Donc à tout élément extrémal Z_o^* de $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ est associé un élément extrémal Z^* de C et réciproquement . De plus, cette correspondance est un homéomorphisme . En effet, si $Z^n \longrightarrow Z$ dans $C^*(Z^n)_o \longrightarrow Z_o$ dans C_o et si $T_1 Z^n = \lambda_1^n Z^n$, $T_1 Z^n \longrightarrow T_1 Z = \lambda_1 Z$ donc $\lambda_1^n \longrightarrow \lambda_1$.

Réciproquement, si $(Z^n)_o \longrightarrow Z_o$ et $\lambda_1^n \longrightarrow \lambda_1$, Z_I est pour Z_o fixé un polynôme en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; c'est donc une fonction continue des λ_1 et pour I fixé $Z_I^n \longrightarrow Z_I$.

3 - ETUDE D'UNE MARCHE AU HASARD SUR LA DROITE

Cette étude est assez voisine de celle de [5] . Elle conduit à la recherche des solutions positives de

$$\alpha_i z_{i+1} + \alpha_i' z_{i-1} = \lambda z_i \quad \text{où } \alpha_i > 0 \quad \alpha_i' > 0 \qquad (3.1)$$

$$\alpha_i + \alpha_i' = p \, .$$

Une solution de (3.1) est entièrement définie par la donnée de z_o et de z_1 , les résultats relatifs à $i \leq o$ se déduisent de ceux relatifs à $i \geq 1$ par une permutation de z_o et z_1 , de α_i et α_i' , de i et $-i+1$; nous énoncerons donc ces derniers.

LEMME 1 - Si $z_1 > o$ et $z_o \geq 0$ sont fixés, z_i est pour tout $i \geq 2$ un polynôme en λ de degré $i-1$ dont toutes les racines sont réelles et séparent les racines de z_{i+1}. Si $z_1 = 0$ et $z_o > 0$, z_i est de degré $i-2$ et ses racines séparent celles de z_{i+1}. Si $z_1 = z_o = 0$, $z_i = 0$.

Démonstration - Il suffit de remarquer que $z_i = o$ implique z_{i+1} et z_{i-1} de signe contraire. Supposons d'abord $z_1 > o$. Par récurrence sur i, z_i est un polynôme de degré $i-1$ dont le terme de plus haut degré est $\dfrac{z_1 \lambda^{i-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-1}}$. z_2 a donc une racine réelle λ_2^1 et $z_3(\lambda_2^1)$ et z_1 sont de signe contraire donc $z_3(\lambda_2^1) < 0$ comme z_3 est > 0 pour $|\lambda|$ assez grand z_3 a deux racines réelles λ_3^1, λ_3^2 telles que $\lambda_3^1 < \lambda_2^1 < \lambda_3^2$. Si z_i a $i-1$ racines réelles λ_i^j, λ_i^j et λ_i^{j+1} étant séparées par λ_{i-1}^j, $z_{i-1}(\lambda_i^j)$ et $z_{i-1}(\lambda_i^{j+1})$ sont de signe contraire donc aussi $z_{i+1}(\lambda_i^j)$ et $z_{i+1}(\lambda_i^{j+1})$, et z_{i+1} a une racine comprise entre λ_i^j et λ_i^{j+1}. Par ailleurs, $\lambda_i^{i-1} > \lambda_{i-1}^{i-2}$ implique $z_{i-1}(\lambda_i^{i-1}) > 0$ donc $z_{i+1}(\lambda_i^{i-1}) < 0$ et z_{i+1} a une racine réelle $\lambda_{i+1}^i > \lambda_i^{i-1}$ et de même une racine $\lambda_{i+1}^1 < \lambda_i^1$.

Si $z_1 = 0$, $z_o > 0$, $z_2 = \dfrac{-\alpha_1'}{\alpha_1} z_o < 0$ joue le rôle de z_1 dans la démonstration précédente.

Corollaire 1 - $z_o \geq 0$ et $z_1 > 0$ étant fixés $z_i(\lambda) \geq 0$ quel que soit $i \geq 0$ si et seulement si $\lambda \geq \sup_{i \geq 2} \lambda_i^{i-1}$

La condition est suffisante d'après le lemme 1. Elle est nécessaire car $z_2(\lambda) \geq 0 \Longrightarrow \lambda \geq \lambda_2^1$.

D'autre part, $z_{n+1}(\lambda) \geqslant 0$ pour $\lambda \geqslant \lambda_{n+1}^{n}$ et

$$z_{n+1}(\lambda) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad \lambda_{n}^{n-1} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{n+1}^{n}$$

car $\lambda_{n+1}^{n-1} \leqslant \lambda_{n}^{n-1}$ donc si $z_i(\lambda) \geqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow \lambda \geqslant \lambda_{n}^{n-1}$

$z_i(\lambda) \geqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1 \Longrightarrow \lambda \geqslant \lambda_{n+1}^{n}$. Donc $z_i(\lambda) \geqslant 0$ quel que soit i entraine $\lambda \geqslant \sup_{i \geqslant 2} \lambda_i^{i-1}$.

Soit $\lambda^+ = \sup_{i \geqslant 2} \lambda_i^{i-1}$ $\lambda^- = \sup_{i \geqslant 1} \mu_{-i}^{i}$ où μ_{-i}^{i} est la plus grande racine réelle du polynome z_{-i} de degré i , la condition nécessaire et suffisante pour que $z_i(\lambda) \geqslant 0$ quel que soit i est que $z_1 \geqslant 0$, $z_o \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant \sup(\lambda^+, \lambda^-) = \lambda_o$.

Faisons maintenant varier z_o et z_1 ; si $z_1 = 0 \quad z_o \geqslant 0$

$z_2 = \dfrac{\lambda z_1 - \alpha_1' z_o}{\alpha_1}$ ne peut être $\geqslant 0$ que si $z_o = 0$; si $z_1 > 0$

λ_i^{i-1} donc λ_o ne dépend que du rapport $\dfrac{z_o}{z_1}$. De plus,

$\lambda_o \geqslant \lambda_2^1 = \dfrac{\alpha_1' z_o}{z_1}$ et $\lambda_o \geqslant \mu_{-1}^{1} = \dfrac{\alpha_o z_1}{z_o}$.

Pour λ fixé, z_i est une fonction linéaire de z_o et de z_1 ; $z_i = a_i z_o + b_i z_1$; $z_i \geqslant 0$, $z_o > 0$, $z_1 > 0$ impliquent donc que le rapport $\dfrac{z_o}{z_1}$ appartient à un intervalle de R éventuellement infini et $z_i \geqslant 0$ quel que soit i que $\dfrac{z_o}{z_1}$ appartient à l'intersection de ces intervalles, c'est-à-dire à un intervalle $[a(\lambda) , b(\lambda)]$ nécessairement borné puisque $\dfrac{\alpha_o}{\lambda_o} \leqslant \dfrac{z_o}{z_1} \leqslant \dfrac{\lambda_o}{\alpha_1}$.

On peut préciser les bornes de cet intervalle pour la valeur particulière $\lambda = p$: (3.1) s'écrit alors :

$$\alpha_i(z_{i+1} - z_i) = \alpha_i'(z_i - z_{i-1})$$

on en déduit par un calcul simple que $z_i \geq 0$ quel que soit i si et seulement si $z_o > 0$, $z_1 > 0$ et

$$a(p) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \leq \frac{z_o}{z_1} \leq \frac{1}{\sigma} + 1 = b(p)$$

où

$$\sigma = \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{k=o}^{l-1} \frac{\alpha_{-k}}{\alpha'_{-k}} \qquad \sigma' = \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{l} \frac{\alpha'_k}{\alpha_k}$$

En particulier, si ces deux séries divergent, $z_i = z_1 = z_o$ est la seule solution positive pour $\lambda = p$.

Il en résulte que si $\lambda > p$ l'intervalle $[a(\lambda), b(\lambda)]$ contient 1.

Pour λ fixé, toute solution positive de (3.1) peut s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients positifs des deux solutions correspondant à $z_1 = 1$, $z_o = a(\lambda)$ et $z_1 = 1$ $z_o = b(\lambda)$.

Inversement, si $\sigma = \sigma' = +\infty$ alors $\lambda_o \geq 1$; en effet on a $\lambda_o(\frac{z_o}{z_1}) > p$ pour $z_o \neq z_1$ puisque $a(p) = b(p) = 1$. Pour $z_o = z_1$ en écrivant (3.1) $\alpha_i(z_{i+1} - z_i) = \alpha'_i (z_i - z_{i-1}) + (\lambda - p) z_i$ on voit que

$$z_{l+1} - z_1 \leq \prod_{i=2}^{l} \frac{\alpha'_i}{\alpha_i} (z_2 - z_1) = \prod_{i=2}^{l} \frac{\alpha'_i}{\alpha_i} \frac{(\lambda - p) z_1}{\alpha_1}$$

et puisque $\sigma = +\infty$ $z_{l+1} \longrightarrow -\infty$ si $\lambda < p$.

On a donc $\lambda_o(1) \geq p$.

4 - ETUDE DE L'EXEMPLE DU PARAGRAPHE 1

D'après les résultats du paragraphe 2, les éléments extrémaux de C sont pour un tel processus solution du système S des équations :

$$(4.1) \qquad \alpha_i z_{i+1,j} + \alpha'_i z_{i-1,j} = \lambda z_{i,j} \qquad \forall i,j$$

$$(4.2) \qquad \beta_j z_{i,j+1} + \beta'_j z_{i,j-1} = \mu z_{i,j} \qquad \forall i,j$$

(4.3) $\lambda + \mu = 1$ et $z_{o,o} = 1$ où

$$\alpha_i + \alpha'_i = p \quad \text{et} \quad \beta_j + \beta'_j = 1 - p$$

En fait, ces équations ne sont pas indépendantes et sont équivalentes au système

(4.1) $\forall i,j$

(4.2) $i = 0 , i = 1 \quad \forall j$

(4.3)

D'après le paragraphe 3 , pour j et λ fixés , une solution de (4.1) quel que soit i est caractérisée par la donnée de $z_{o,j}$, $z_{1,j}$. Ces nombres sont eux-mêmes caractérisés pour $\mu = 1 - \lambda$ fixé comme solutions de (4.2) par la donnée de $z_{o,o}$, $z_{o,1}$, $z_{1,o}$, $z_{1,1}$. Donc on obtient une solution et une seule de S en se donnant λ , $z_{o,o}$, $z_{o,1}$, $z_{1,o}$, $z_{1,1}$.

Cherchons maintenant les solutions positives de S . Pour chaque valeur de λ comprise entre 0 et 1, l'ensemble des points $(z_{o,1}$, $z_{1,o}$, $z_{1,1})$ qui déterminent une solution positive de S est un convexe fermé C_λ de R^{+3} éventuellement vide. Une condition nécessaire pour que C_λ soit non vide est d'après le paragraphe 3 que

$$(4.4) \qquad \lambda_o\left(\frac{1}{z_{1,o}}\right) \leq \lambda \leq 1 - \mu^o\left(\frac{1}{z_{o,1}}\right)$$

Choisissons λ , $z_{1,o}$, $z_{o,1}$ tels que (4.4) soit satisfaite et prenons

$$(4.5) \quad z_{1,1} = z_{1,o}\, z_{o,1}$$

Alors on déduit de

$$\beta_j z_{o,j+1} + \beta'_j z_{o,j-1} = \mu z_{o,j}$$

$$\beta_j z_{1,j+1} + \beta'_j z_{1,j-1} = \mu z_{1,j}$$

$$\beta_j(z_{o,j+1}\, z_{1,j} - z_{1,j+1}\, z_{o,j}) = \beta'_j\,(z_{o,j} z_{1,j-1} - z_{1,j}\, z_{o,j-1})$$

D'où $z_{o,j+1}\, z_{1,j} - z_{1,j+1}\, z_{o,j} = z_{o,1}\, z_{1,o} - z_{1,1}\, z_{o,o} = 0$

et

$$\frac{z_{1,j+1}}{z_{o,j+1}} = \frac{z_{1,j}}{z_{o,j}} = z_{1,o} \qquad \text{et de même}$$

$$\frac{z_{i+1,i}}{z_{i+1,o}} = \frac{z_{i,1}}{z_{i,o}} = z_{o,1}$$

Il en résulte que (4.4) est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution de S ainsi déterminée soit positive. On peut d'ailleurs mettre alors cette solutinn sous la forme $z_{i,j} = x_i\, y_i$

où $\alpha_i x_{i+1} + \alpha'_i x_{i-1} = \lambda x_i \qquad x_o = y_o = 1$

$\beta_j y_{j+1} + \beta'_j y_{j-1} = (1-\lambda)\, y_j \qquad x_1 = z_{1,o} \qquad y_1 = z_{o,1}$

Donc si (4.4) est satisfaite, la droite $x_1 = z_{1,o} \quad x_2 = z_{o,1}$ coupe C_λ suivant un intervalle fermé non vide contenant $x_3 = z_{1,o}\, z_{o,1}$

Discutons (4.4) ; on a vu au paragraphe 3 que $\lambda_o(1) \leq p \leq 1 - \mu_o(1)$

on a donc $l_o = \inf \lambda_o \leq p \leq 1 - \inf \mu_o(1) = 1 - m_o$. Pour tout λ tel que $l_o \leq \lambda \leq 1 - m_o$, il existe $z_{1,o}$ et $z_{o,1}$ satisfaisant (4.4) ; si $l_o < 1-m_o$, soit C^o_λ l'ensemble des éléments extrémaux de C_λ dans R^3 et Γ l'ensemble de R^4 défini par $(x, y, z) \in C^o_t$; on a vu au paragraphe 2 qu'on pouvait définir un homéomorphisme entre Γ et les éléments extrémaux de C .

Si $l_o = 1 - m_o = p$ et si pour $x \neq 1$ $\lambda_o(x) > p$,

$\mu_o(x) > 1 - p$ .On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour cela est que les quatre séries (4.6) ci-dessous divergent :

(4.4) implique $\lambda = p \qquad z_{1,o} = z_{o,1} = 1$, d'où $z_{i,o} = 1$ quel que soit i , puis $z_{i,j} = 1$ quel que soit i, j d'où le

THEOREME , 4.1 - La condition nécessaire et suffisante pour que la frontière de la chaine définie par (1.7) soit réduite à un seul point est que les quatre séries

$$(4.6)\qquad \sum \prod_{k=0}^{l-1} \frac{\alpha_{-k}}{\alpha'_{-k}} \quad , \quad \sum \prod_{k=1}^{l} \frac{\alpha'_k}{\alpha_k} \quad , \quad \sum \prod_{k=0}^{l-1} \frac{\beta_{-k}}{\beta'_{-k}} \quad , \quad \sum \prod_{k=1}^{l} \frac{\beta'_k}{\beta_k}$$

divergent.

On voit que c'est le cas en particulier si $\alpha_k = \alpha'_k$ $\beta_k = \beta'_k$ (cas du processus homogène avec $\sum_J J \pi_I^J = 0$).

5 - UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QUE LA FRONTIERE SOIT REDUITE A UN POINT DANS LE CAS OU $n = 1$.

Nous avons vu, au chapitre précédent, que , pour un processus homogène, la condition nécessaire et suffisante pour que la frontière soit réduite à un point, était que l'espérance mathématique du pas $\sum_{J \in \mathcal{J}} J \pi_I^{I+J}$ soit nulle. L'étude du paragraphe 3 montre que cette condition n'est pas nécessaire, même pour $n = 1$, dans le cas général ; nous allons montrer qu'elle est suffisante pour $n = 1$ en utilisant le fait que $\mathcal{G}$ est totalement ordonné (Nous notons les éléments de $\mathcal{G}$ par une petite lettre si $n = 1$).

PROPOSITION 5.1 - Si $n = 1$ et si $\bigcup_0^\infty k\mathcal{J} = \mathcal{G}$ alors

$$(5.1)\qquad \sum_{j \in \mathcal{J}} \pi_i^{i+j} z_{i+j} = z_i \qquad \forall i \in \mathcal{G}$$

$$(5.2)\qquad z_i \geq 0 , \quad \forall i \in \mathcal{G} , \quad z_0 = 1$$

$$(5.3)\qquad \sum_{j \in \mathcal{J}} j \pi_i^{i+j} = 0 , \qquad \sum_{j \in \mathcal{J}} \pi_i^{i+j} = 1$$

$\pi_i^{i+j} > 0$ si et seulement si $j \in \mathcal{J}$, $\forall i \in \mathcal{G}$,

impliquent $z_i = 1$, $\forall i \in \mathcal{G}$.

Démon stration - Soit

$$-\alpha = \inf(j : j \in \mathfrak{J}), \qquad \beta = \sup(j : j \in \mathfrak{J})$$

puisque $\mathfrak{J}$ engendre $\mathfrak{G}$, $-\alpha < 0 < \beta$.

Soit $v_i = \inf(v : Z_{i+j} - Z_i - j\,v \geqslant 0 \qquad \forall j : -\alpha \leq j \leq 0)$

il résulte de (5.3) qu'il existe $k > 0$, $k \in \mathfrak{J}$ tel que

$$(5.4) \qquad Z_{i+k} - Z_i - k\,v_i \leq 0$$

Soit k_1 le plus petit $k > 0$ satisfaisant (5.4) on a :

$$Z_{i+j} - Z_i - j\,v_i \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad -\alpha \leq j \leq 0$$

$$Z_{i+k_1} - Z_i - k_1\,v_i \leq 0$$

d'où pour $-\alpha \leq j \leq 0$

$$Z_{i+j} - Z_{i+k_1} - v_i\,(j - k_1) \geqslant 0$$

ou , en posant $j - k_1 = l$

$$(5.5) \qquad Z_{i+k_1+l} - Z_{i+k_1} - v_i l \geqslant 0$$

pour $-k_1 - \alpha \leq l \leq -k_1$.

On déduit aussi de (5.4)

$$Z_{i+k} - Z_{i+k_1} - v_i(k - k_1) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq k_1$$

où $$(5.6) \qquad Z_{i+k_1+l} - Z_{i+k_1} - v_i l \geqslant 0 \qquad -k_1 \leq l \leq 0$$

De (5.5) et de (5.6) on déduit

$$(5.7) \qquad v_{i+k_1} \leq v_i$$

On détermine ainsi une suite d'entiers k_n tels que $0 < k_n < \beta$,

que si l'on pose $i + \sum_1^n k_j = i_n$,

$$v_{i_n} \leq v_{i_{n-1}} , \qquad Z_{i_n} - Z_{i_{n-1}} - v_{i_{n-1}}\,k_n \leq 0 .$$

D'où

$$Z_{i_n} - Z_i - \sum_{o}^{n-1} v_{i_j} k_{j+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad v_i \sum_{1}^{n} k_j \geq \sum_{o}^{n-1} v_{i_j} k_{j+1} \geq -Z_i$$

d'où

$$v_i \geq \frac{-Z_i}{\sum_{1}^{n} k_j}$$

et en faisant $n \longrightarrow +\infty$

$$(5.8) \qquad v_i \geq 0$$

Par définition de v_i, il existe $j_1 \in \mathfrak{J}$, tel que $-\alpha \leq j_1 \leq 0$, $Z_{i+j_1} - Z_i - v_i\, j_1 = 0$ et $j_1, j_2, \ldots, j_n$ tels que $-\alpha \leq j_1 \leq 0$, $\sum_{1}^{n} j_l = k'_n$ et

$$Z_{i+k'_{n-1}} - Z_{i+k'_n} - v_{i+k'_{n-1}}\, j_n = 0$$

d'où

$$Z_{i+k'_n} - Z_i - \sum_{l=1}^{n} v_{i+k'_{l-1}}\, j_l = 0$$

Posons $v_i^m = \inf(v_{i+j} : -\alpha \leq j \leq \beta)$

Quel que soit $k < 0$, en appliquant à $i+k$ la construction ci-dessus, on détermine n tel que :

$$-\alpha \leq k + k_1 + \ldots + k_n \leq \beta ,$$

donc en vertu de (5.7)

$$v_{i+k} \geq v_i^m$$

D'où

$$v_i^m\, k'_n \geq \sum_{1}^{n} v_{i+k'_{l-1}}\, j_l = Z_{i+k'_n} - Z_i \geq -Z_i$$

et

$$v_i^m \leq \frac{Z_i}{-k'_n}$$

d'où en faisant tendre n vers l'infini, $v_i^m \leq 0$ et compte-tenu de (5.8)

$$v_i^m = 0 .$$

Il existe donc i tel que $v_i = 0$ et $v_{i_n} = 0$ quel que soit n , D'où $Z_{i_n} = Z_i$ quel que soit n (car l'inégalité stricte dans (5.4) implique l'inégalité stricte dans (5.7)) . On en déduit $Z_{i+j} \geqslant Z_i$ pour $-\alpha \leq j \leq k_1$ puis pour $-\alpha \leq j$ d'où compte-tenu de (5.3) $Z_{i+j} = Z_i$ quel que soit $j \geq -\alpha$ tel que $j \in \bigcup_0^\infty n\,\mathcal{J}$ et comme $\bigcup_0^\infty n\,\mathcal{J} = \mathcal{G}$, quel que soit $j \geq -\alpha$, donc quel que soit j .

6 - ETUDE D'UNE TRANSFORMATION QUI CONSERVE LA FRONTIERE

Etant donnée une matrice Π de probabilité, nous cherchons à définir d'autres matrices P telles que

$$PZ = Z \ , \ Z \geqslant 0 \iff \Pi Z = Z \ , \ Z \geqslant 0$$

PROPOSITION 6.1 - Si $$P_I^J = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(I)\ \Pi_I^{nJ} \qquad (6.1)$$

où $a_n(I) \geqslant 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(I) = 1$.

$\Pi Z = Z$, $Z \geqslant 0$ entraine $PZ = Z$.

Cette proposition résulte immédiatement du fait que les sommations peuvent être permutées, puisque tous les termes sont positifs.

La transformation (6.1) admet l'interprétation suivante : considérons un jeu dont les coups sont indépendants, le résultat du (p+1)ième coup étant J avec probabilité Π_I^J si celui du pième est I . Un joueur qui a joué le pième coup décide de rejouer au p + nième par un premier tirage au sort de répartition $a_n(I)$; il joue ainsi à un nouveau jeu défini par P.

La proposition (6.1) admet une réciproque dans le cas paericulier où $a_n(I) = 0$ quel que soit $n \geqslant 2$.

PROPOSITION 6.2 - Si $P_I^J = a_o(I)\,\delta_I^J + (1 - a_o(I))\,\pi_I^J \quad 0 \leq a_o(I) < 1$

$PZ = Z,\ Z \geqslant 0 \iff \pi Z = Z,\ Z \geqslant 0.$

En effet, $Z_I = a_o(I)\, Z_I + (1 - a_o(I)) \sum_J \pi_I^J Z_J$ entraine

$$Z_I = \sum_J \pi_I^J Z_J \ .$$

La proposition 6.1 admet aussi une réciproque en ce qui concerne les solutions bornées de $\pi Z = Z$.

PROPOSITION 6.3 -

Si $\sup_I \dfrac{\sum_2^\infty (n-1)\, a_n(I)}{1 - a_o(I)} < 1$, $a_o(I) < 1$, $PZ = Z$,

Z borné entraine $\pi Z = Z$.

Soit Δ_n la matrice diagonale d'éléments $a_n(I)\delta_I^J$, (6.1) s'écrit :

$$P = \sum_o^\infty \Delta_n \pi^n \quad \text{où} \quad \sum_o^\infty \Delta_n = I \quad \text{et} \quad PZ = Z \text{ implique}$$

$$\sum_o^\infty \Delta_n (\pi^n - I) Z = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_1^\infty \Delta_n \sum_o^{n-1} \pi^k (\pi - I) Z = 0$$

ou $$((I - \Delta_o) + \sum_2^\infty \Delta_n \sum_1^{n-1} \pi^k)\ (\pi - 1) Z = 0$$

d' où $$(I + (I - \Delta_o)^{-1} \sum_2^\infty \Delta_n \sum_1^{n-1} \pi^k)\ (\pi - I) Z = 0 \ .$$

Soit

$$B = (I - \Delta_o)^{-1} \sum_2^\infty \Delta_n \sum_1^{n-1} \pi^k$$

puisque $\|\pi\| = 1$ $\quad \|B\| \leq \sup_I \dfrac{\sum_2^\infty (n-1) a_n(I)}{1 - a_o(I)} < 1$.

$I + B$ est donc inversible et $\pi Z = Z$. Il est possible de préciser ces résultats quand a_n ne dépend pas de I ; Δ_n commute alors avec π . Cette transformation a été introduite par Cohen [1] et [2].

PROPOSITION 6.4 - Si $P = \sum_0^\infty a_n \pi^n$, $a_n \geq 0$, $\sum_0^\infty a_n = 1$,

la condition nécessaire et suffisante pour que $PZ = Z$, $Z \geq 0$ soit équivalent à $\pi Z = Z$, $Z \geq 0$ quelle que soit la matrice de probabilité π est que l'équation $\sum_0^\infty a_n z^n = 1$ admette $z = 1$ comme seule racine de module 1 (ou encore que le P.G.C.D. des k tels que $a_k > 0$ soit égal à 1) .

La condition est nécessaire : soit $\pi_i^j = \delta_{i+1}^j$

$\pi Z = Z \iff Z_{i+1} = Z_i$; $pZ = Z$ entraine

$$(6.2) \qquad \sum a_n Z_{i+n} = Z_i$$

Si le P.G.C.D. des k tels que $a_k > 0$ est égal à p , on obtient une solution de (6.2) en choisissant arbitrairement Z_1 , $Z_2, \ldots, Z_p$ et en prenant $Z_{i+np} = Z_i$.

La condition est suffisante : Soit $Z \geq 0$ tel que $PZ = Z$; on remarque que P et π commutent ; on a donc $P \pi^k Z = \pi^k Z$ ou en posant $(\pi^k Z)_I = Z_I U^k$

$$(6.3) \qquad \sum_0^\infty a_n U^{n+k} = U^k$$

avec $U^k \geq 0$, $U^0 = 1$. On montre comme au chapitre précédent qu'un élément extrémal du cône df défini par (6.3) satisfait

$U^j U^k = U^{j+k}$ quels que soient j , k tels que

$a_k \neq 0$ et comme le P.G.C.D. des a_k tels que $a_k \neq 0$ est égal à 1 $U^j = (u)^j$ avec $\sum_0^\infty a_n u^j = 1$ d'où $u = 1$ et $(\pi^k Z)_I = Z_I$ quels que soient I et k.

7 - TRANSFORMEE D'UN PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

Nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer tous les processus obtenus par une transformation de la forme $\Pi' = \sum_{0}^{\infty} a_n \Pi^n$, $a_n = 1$, $a_n \geq 0$, quand Π est la matrice d'un processus homogène de naissance et de mort.

Il s'agit donc , étant donné $\alpha_n \geq 0$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n = 1$, de savoir à quelles conditions il est possible de déterminer $a_l \geq 0$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_l = 1$, et p, q, $p \geq 0$, $q \geq 0$ tels que $p + q = 1$ satisfaisant :

$$(7,1) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \, e^{ni\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_l \, (p \, e^{i\theta} + q^{e-i\theta})^l$$

ou

$$(7,2) \qquad \alpha_n = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C^l_{2l-n} \, p^l \, q^{l-n} \, a_{2l-n}$$

ou

$$(7,3) \qquad \alpha_n \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C^l_{2l-n} \, (pq)^{\frac{2l-n}{2}} \, a_{2l-n}$$

ou en posant :

$$(7,4) \qquad \beta_n = \alpha_n \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} , \qquad b_l = a_l (pq)^{1/2}$$

$$(7,5) \qquad \beta_n = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C^l_{2l-n} \, b_{2l-n} = \sum_{l=0}^{\infty} A^l_n \, b_l$$

avec

$$(7,6) \qquad A_n^l = \begin{cases} 0 \text{ si } n-l \text{ est impair et si } l < |n| \\ C_l^{\frac{l+n}{2}} \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

D'où une première condition nécesaaire :

$$\beta_{-n} = \beta_n \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

ou

$$(7,7) \qquad \sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}} = \frac{q}{p}$$

d'où

$$\beta_n = \beta_{-n} = \sqrt{\alpha_n \, \alpha_{-n}}$$

Les A_n^l pour $n \geq 0$, $l \geq 0$ définissent une matrice A dont l'inverse à gauche, X , s'il existe satisfait

$$(7,8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} X_k^n \, A_n^l = \delta_k^l$$

ou , en tenant compte de (7,6)

$$(7,9) \qquad \sum_{n=0}^{l} X_k^n \, C_l^{\frac{l+n}{2}} = \delta_k^l$$

(7,9) implique $X_k^n = 0$ pour $n < k$ et pour $n-k$ impair ; d'où

$$(7,10) \qquad X_k^k = 1$$

et en posant $l = k + 2r$, $n = k + 2s$

$$(7,11) \qquad \sum_{s=0}^{r} C_{k+2r}^{r-s} \, X_k^{k+2s} = 0 \qquad \text{pour} \qquad r > 0$$

ce qui détermine de façon unique les X_k^n pour $n \geq k$.

On déduit d'ailleurs de

$$(7,12)\qquad \sum_{o}^{k+2r} C_{k+2r}^{s}\, z^{s-r} = \frac{(1+z)^{k+2r}}{z^{r}}$$

$$\frac{d^{k}}{dz^{k}}\left[\frac{(1+z)^{k+2r}}{z^{r}}\right] = \sum_{o}^{k+2r} C_{k+2r}^{s}\,(s-r)\ldots(s-r-k+1)\, z^{s-r-k}$$

$$(7,13)\qquad = \sum_{o}^{r} C_{k+2r}^{s}\left[(s-r)\ldots(s-r-k+1)z^{s-r-k} + (r-s+k)..(r-s+1)z^{r-s}\right]$$

D'où en faisant $z = -1$, le premier membre de (7,13) étant nul pour $r > o$ égal à $k!$ pour $r = 0$:

$$(7,14)\qquad X_{k}^{k+2s} = \frac{s\ldots(s+k-1)(-1)^{s} + (s+k)\ldots(s+1)(-1)^{s}}{k!}$$

$$= (-1)^{s}\,\frac{(k+2s)(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!}$$

résultat qu'on aurait pu établir à partir de (7,1) en utilisant les polynomes de Tchebycheff.

X est aussi un inverse à droite de A , en effet :

$$\sum_{l=o}^{\infty} A_{n}^{l}\, X_{l}^{k} = 0 \quad \text{si} \quad n \leq k \quad \text{ou si} \quad k-n \quad \text{est impair}$$

$$= A_{n}^{n}\, X_{n}^{n} = 1 \quad \text{si} \quad n = k$$

$$= \sum_{o}^{q} A_{n}^{n+2p}\, X_{n+2p}^{n+2q} \quad \text{si} \quad k = n + 2q \quad q \text{ entier} > 0$$

$$= \sum_{o}^{q} C_{n+2p}^{n+p}\,\frac{(-1)^{q-p}}{(n+2p)!}\,(n+2q)(q-p+1)\ldots(q+p+n-1)$$

$$= \frac{1}{(n+q)!}\sum_{o}^{q} C_{n+q}^{r}\,\left[(2q+n-r)\ldots(q-r+1)(-1)^{r} -\right.$$

$$\left.\frac{1}{(n+q-1)!}\sum_{o}^{q-1} C_{n+q-1}^{r}\,(2q+n-r-2)\ldots(q-r)(-1)^{r}\right.$$

Or

$$(7.15)\qquad \frac{1}{(n+q)!}\sum_{o}^{q} C_{n+q}^{r}\,(2q+n-r)..(q-r+1)\,z^{q-r}$$

$$= \frac{1}{(n+q)!}\,\frac{d^{n+q}}{dz^{n+q}}\left[z^{q}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{r+q}\right]$$

D'où

$$(7.16)\qquad \frac{1}{(n+q)!}\sum_{o}^{q} C_{n+q}^{r}\,(2q+n-r)\ldots(q-r+1)\,(-1)^{r} = 1$$

et

$$(7.17)\qquad \sum_{l=o}^{\infty} A_{n}^{l}\,X_{l}^{k} = \delta_{n}^{k}$$

Soit $$b'_{k} = \sum_{l=o}^{\infty} X_{k}^{l}\,\beta_{l} = \sum_{s=o}^{\infty} X_{k}^{k+2s}\,\beta_{k+2s} \qquad (7.18)$$

p et q étant déterminés par (7.7), distinguons deux cas

a) $p \neq q$ (on peut alors supposer $p > q$).

De $\left|X_{k}^{k+2s}\right| \leq \frac{(k+2s)^{k}}{k!}$, on déduit :

(7.19)

que $$\sum_{s} \left|X_{k}^{k+2s}\right| \beta_{k+2s} \leq \sum_{s} \frac{(k+2s)^{k}}{k!}\,\alpha_{k+2s}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k+2s}{2}}$$

converge absolument :

D'où

$$(7.20)\qquad b'_{k} = \sum_{s=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty} X_{k}^{k+2s}\,C_{k+2r}^{k+r+s}\,b_{k+2r}$$

$$= \sum_{o}^{\infty} \delta_{o}^{r}\,b_{k+2r} = b_{k}$$

d'où l'unicité de la solution.

Par ailleurs, on déduit de (7,20)

$$(7.21) \qquad |b'_k| \leqslant \sum_s \alpha_{k+2s} \frac{k^k e^{-k}}{k! \left(\log \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^k}$$

donc le rayon de convergence de $\sum b'_k z^k$ est supérieur à $\operatorname{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$

Supposons β_k choisi de façon que

$$(7.22.) \qquad b'_k = \sum_{s=0}^{\infty} \chi_k^{k+2s} \beta_{k+2s} \geqslant 0$$

et soit $a'_k = b'_k (pq)^{-k/2}$ et R le rayon de convergence de $\sum a'_k z^k$.

Pour $\frac{q}{p} < |z| < 1$ et $\left|pz + \frac{q}{z}\right| < R$,

$$(7.23) \qquad \sum_0^{\infty} \alpha_n \left[z^n + \left(\frac{q}{pz}\right)^n\right] = \sum_0^{\infty} a'_n \left(pz + \frac{q}{z}\right)^n$$

En effet ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \rho^k \left|\chi_k^{k+2s}\right| \beta_{k+2s} < \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \rho^k \frac{r^k}{k!} \alpha_r \left(\frac{q}{p}\right)^{r/2}$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{\infty} e^{\rho r} \alpha_r \left(\frac{q}{p}\right)^{r/2}$$

est sommable pour $\rho < \operatorname{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$

(7.23) est donc valable pour $\left|pz + \frac{q}{z}\right| < \operatorname{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$ et par prolongement pour $\frac{q}{p} < |z| < 1$ et $\left|pz + \frac{q}{z}\right| < R$.

Si $z = r e^{i\theta}$, $\zeta = pz + \frac{q}{z} = \left(pr + \frac{q}{r}\right) \cos \theta + i \left(pr - \frac{q}{r}\right) \sin \theta$ définit une correspondance biunivoque entre l'intérieur de l'ellipse

à deux feuillets de demi-axes 1 et p-q et la couronne $-\frac{q}{p} < |z| < 1$.

Soit $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ le premier membre de (7.23) , $\varphi(z) + \varphi(-\frac{q}{pz})$ définit une fonction de ζ analytique à l'intérieur de l'ellipse de demi-axes 1 et p-q . On a alors $\psi(\zeta) = \sum_0^\infty a_n \zeta^n$ pour $|\zeta| < R$.

Si R était strictement inférieur à 1 , $\psi(\zeta)$ pourrait se prolonger le long de l'axe réel par une fonction totalement croissante ($a_n \geq 0$) elle même prolongeable analytiquement à l'intérieur du cercle $|\zeta| \leq 1$, on a donc $R \geq 1$.

En faisant tendre z vers 1 dans (7.23) , on obtient :

$$\sum_0^\infty a'_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n = 1$$

les deux conditions (7.7) et (7.22) sont donc, si $p > q$ des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité des a_i .

b) p = q

Alors $\beta_n = \alpha_n$, mais la majoration fournie par (7.19) ne permet plus d'affirmer que $\sum_s |X_k^{k+2s}| \alpha_{k+2s}$ converge. Or, si la série définit b'_k converge, celle qui définit b'_{k-2} converge absolument, en effet, elle a pour terme général :

$$(-1)^s (k + 2s - r)(s+1)\ldots(s + k - 3)\, \alpha_{k+2(s-1)}$$

$$= (-1)^{s'+1} (k + 2s')(s' + 2) \ldots (s' + k - 2)\, \alpha_{k+2s'}$$

$$= (-)^{s'+1} \frac{(k+2s')(s'+1)\ldots(s'+k-1)}{(s'+1)(s'+k-1)} \alpha_{k+2s'}$$

L'exemple suivant montre que $\sum_s X_k^{k+2s} \alpha_{k+2s}$ peut diverger. On a :

$$(7.24) \qquad 1 - 2\theta/\pi = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\theta}{(2p+1)^2} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi .$$

D'autre part, de

$$(7.25) \qquad \text{Arc cos } u = \frac{\pi}{2} - \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

on déduit

$$(7.26) \qquad 1 - 2\theta/\pi = \frac{2}{\pi} \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{(\cos\theta)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad .$$

La relation (7.1) est donc satisfaite par $p = q = 1/2$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\pi} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n(2n+1)}$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha_{-(2n+1)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et

$$x_k^{k+2s} \alpha_{k+2s} = (-1)^s \frac{4}{\pi^2} \frac{(s+1)\ldots(s+k-1)}{k+2}$$

ne tend pas vers zéro si $k \geq 2$

Etant donné les α_i tels que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$

$\alpha_i = \alpha_{-i}$, la fonction

$$\varphi(\theta) = \alpha_o + 2 \sum_1^\infty \alpha_n \cos n\theta$$

est définie pour tout θ réel. Par ailleurs ,

$$\theta = \frac{\text{Log } (u + \sqrt{u^2 - 1})}{i}$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle $|u| < 1$ et prolonge Arc cos u si l'on prend la détermination du logarithme réelle pour u réel.

Si on pose $\frac{\pi}{2} - \theta = x + iy$, on a $|u|^2 = \mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x$ et $|u| < 1$ entraine $\mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x < 1$ ou $|\mathrm{sh}\, y| < |\cos x|$ ce qui définit un domaine .D . Donc, si $\varphi(\theta)$ peut être prolongée par une fonction holomorphe dans D, $\psi(u) = \varphi(\theta(u))$ sera holomorphe à l'intérieur du cercle $|u| < 1$ et de $\psi(u) = \sum_0^\infty a_n u^n$, on déduira

$$\alpha_0 + 2 \sum_1^\infty \alpha_n \cos n\theta = \sum_0^\infty a_n (\cos\theta)^n$$

les a_n étant donnés par

$$(7.28) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(u)\,du}{u^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\theta) \sin\theta\, d\theta}{(\cos\theta)^{n+1}}$$

où Γ' est une courbe de D entourant $\theta = \frac{\pi}{2}$

Si les a_n ainsi déterminés sont $\geqslant 0$, en faisant tendre θ vers zéro, on obtient :

$$\sum_0^\infty a_n = \alpha_0 + 2 \sum_1^\infty \alpha_n = 1 \quad .$$

L'exemple suivant montre qu'on peut avoir $\alpha_n \geqslant 0$

$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n = 1$ et que φ peut ne pas être analytique pour $\theta = \frac{\pi}{2}$:

il suffit de remplacer θ par 2θ dans (7.24).

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^\infty \frac{\cos(4p+2)\theta}{(2p+1)^2} = \begin{cases} 1 - \frac{4\theta}{\pi} & \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -3 + \frac{4\theta}{\pi} & \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \psi\pi \end{cases}$$

En résumé, on a le

(7.1)

THEOREME - Etant donné $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i = 1$, pour qu'il existe $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q = 1$, et $a_i \geq 0$ $\sum_{0}^{\infty} a_i = 1$, tels que (7.1) , il est nécessaire que

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}}$$

ne dépende pas de n . Alors $$\frac{p}{q} = \sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}}$$

Si $p \neq q$, il est nécessaire et suffisant que

$$\forall k , \quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(k+2s)(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!} \sqrt{\alpha_{k+2s}\ \alpha_{-(k+2s)}} \geq 0$$

etalors on a la solution unique :

$$a_k = \frac{1}{(pq)^{k/2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(k+2s)(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!} \sqrt{\alpha_{k+2s}\ \alpha_{-k+2s}}$$

Si $p = q = 1/2$, il est nécessaire et suffisant que la fonction

$$\varphi(\theta) = \alpha_o + 2 \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta -$$ puisse être prolongée par une fonction holomorphe dans le domaine D défini par

$$\sin^2 \mathrm{Re}(\theta) + \mathrm{sh}^2 \mathrm{Im}(\theta) < 1$$

S'il en est ainsi , et si

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\theta) \sin\theta\, d\theta}{\cos\theta^{k+1}} \geq 0$$

où Γ est une courbe de D entourant le point $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors on a la solution unique :

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\theta) \sin\theta\, d\theta}{(\cos\theta)^{k+1}}$$

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 3

1] COHEN , J.W. - "On derived Markov chains with a discrete state space" Mathematical Institute of the technological University Delft Octobre 1960

2] COHEN, J.W. - "Application on derived Markov chains in quauing and inventory theory" - Mathematical Institute of the Technological University - Delft , Octobre 1960

3] FORSYTHE, G.E - WASOW, W.R. - "Finite difference methods for partial differential equations - John Wiley and sons - New York 1960

4] HENNEQUIN, P.L. - "Matrices de probabilité définissant la même frontière" Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris - t. 252 - pp. 235-236.

5] KARLIN, S. - Mc GREGOR,J. - " The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem" Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol 85 (1957) - pp.489-546.

6] KARLIN, S. - Mc GREGOR, J. - "The classification of birth and death processes". Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol. 86 , pp. 366-400.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

Vu et approuvé :

Paris, 4 MAI 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. ZAMANSKY.

Vu

et Permis d'imprimer:

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.